Exposé du 08/03/21

<u>Théorème</u> (d'incidence) Soient E un e.a. et V et W deux ss esp. affines de dim. finie de E.

1. Si $V \cap W = \emptyset$, alors $\mathrm{Aff}(V \cup W)$ est de dim. $\dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$.
2. Si $V \cap W \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Aff}(V \cup W)$ est de dim $\dim(\vec{V} + \vec{W})$.

<u>Exercice 2.20</u>

1. On se place ds un e.a. E de dim 2 et on $\tilde{c}$ deux droites affines D_1 et D_2.

<u>Pb</u>: déterminer $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2))$.

<u>1$^{\text{er}}$ Cas</u> : $D_1 = D_2$

Alors $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2) = \mathrm{Aff}(D_1) = D_1$.

En particulier, $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 1$.

<u>2$^{\text{e}}$ Cas</u> : $D_1 \neq D_2$.

<u>1$^{\text{er}}$ sous-cas</u> $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Le théorème d'incidence assure que $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$ est de dim. $\dim(\vec{D_1} + \vec{D_2}) + 1$. On observe alors que $\vec{D_1} + \vec{D_2}$ est de dimension au moins 1 car $\vec{D_1} \subseteq \vec{D_1} + \vec{D_2}$.

Donc $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$ est de dim au moins 2 et donc de dimension 2 car ce ss-e.a. est inclus ds E qui est de dim. 2.

<u>2^e ss cas</u> $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Le théo. d'incidence assure donc que

$$\dim\left(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)\right) = \dim\left(\vec{D_1} + \vec{D_2}\right).$$

Le pb restant est le suivant : quelle est la dim. de $\vec{D_1} + \vec{D_2}$?

<u>Aparté</u> : on a

$$\underbrace{(0)}_{\dim 0} \subseteq \underbrace{\vec{D_1} \cap \vec{D_2}}_{\dim 0 \text{ ou } 1} \begin{array}{l} \overset{(*)}{\subseteq} \vec{D_1} \\ \underset{(*)}{\subseteq} \underbrace{\vec{D_2}}_{\dim 1} \end{array}$$

Supposons que $\dim\left(\vec{D_1} \cap \vec{D_2}\right) = 1$. Alors, ce qui précède mq $\vec{D_1} \cap \vec{D_2} = \vec{D_1} = \vec{D_2}$ (cf. les dim. et les inclusions (*)).

Comme ds le présent sous-cas on a $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, on peut considérer $a \in D_1 \cap D_2$ et alors

$$D_1 = \left\{ T_{\vec{u}}(a),\ \vec{u} \in \vec{D_1} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ T_{\vec{u}}(a),\ \vec{u} \in \vec{D_2} \right\}$$

Donc, si l'on supp. $\vec{D_1} = \vec{D_2}$, on a $D_1 = D_2$.

Comme on est ds le 2^{e} cas, on $D_1 \neq D_2$, ce qui n'est pas possible, et donc $\overrightarrow{D_1} \neq \overrightarrow{D_2}$. Il s'ensuit (cf. aparté) que $\overrightarrow{D_1} \cap \overrightarrow{D_2} = (\vec{0})$ et donc que $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ sont en somme directe. Il s'ensuit alors que $\dim(\overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2}) = 2$.

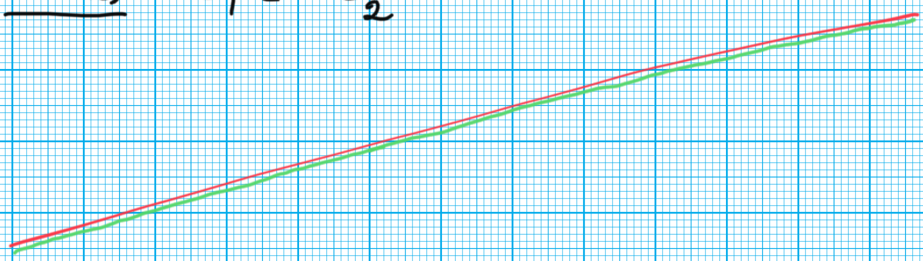
Concl. : $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 2$, càd que $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2) = E$.

Complément : en fait, on a le résultat suivant : soit E un e.a. de dim. 2 et D_1 et D_2 deux droites de E. Si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors D_1 et D_2 sont parallèles, càd que $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$.

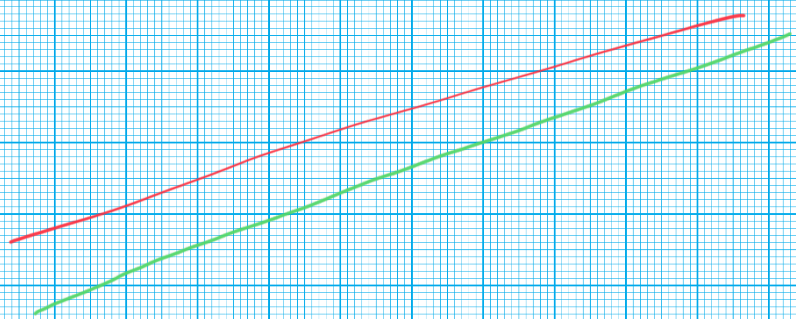
En effet : supposons que $\overrightarrow{D_1} \neq \overrightarrow{D_2}$. Alors le raisonnement de l'aparté mq $\overrightarrow{D_1} \cap \overrightarrow{D_2} = (\vec{0})$. Ce dont on déduit que $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ st en somme directe et donc que $\dim(\overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2}) = 2$. Mais alors, comme on sup. $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, le théo. d'incidence mq $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 3$, ce qui est absurde.

Illustration :

1er cas $D_1 = D_2$

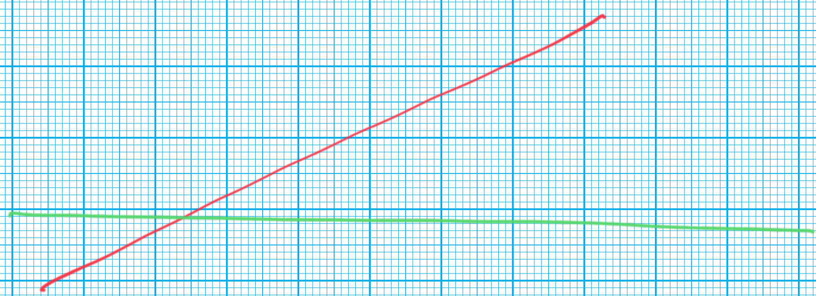


2e cas, 1er sous-cas $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (et donc $D_1 \neq D_2$).



droites parallèles cf. compl.

2e cas, 2e sous-cas $D_1 \neq D_2$ et $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.



Ex. : dans le 2e cas, 2e sous-cas, on a nécessairement que $D_1 \cap D_2$ est réduit à un point.

On aborde maintenant les notions de <u>repères affines</u> et de <u>repère cartésien</u>.

<u>Proposition 2.22</u> Si E un e.a. et $\{a_0, \dots, a_k\}$ une famille de points de E. Alors, le sous-esp. affine engendré par $\{a_0, \dots, a_k\}$ est de dimension au plus k.

<u>dém.</u> On utilise le point 2 de la prop 2.17. Posons $a = a_0$. On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_a} & \vec{E} \\ x & \longmapsto & \overrightarrow{ax} \end{array}$$

et
$$\overrightarrow{Aff(\{a_0, \dots, a_k\})} = Vect\left(\phi_a(a_0), \phi_a(a_1), \dots, \phi_a(a_k)\right)$$
$$= Vect\big(\underbrace{\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_k}}_{k \text{ vecteurs}}\big)$$

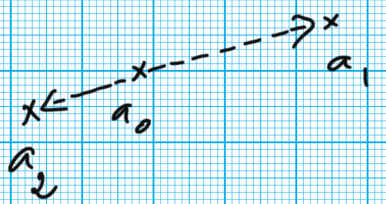
de dim. au plus k.

Donc $\dim\left(Aff\{a_0, \dots, a_k\}\right) \leq k$. ∎

Illustration On se place ds $\mathbb{R}^3$, e.a. standard et on considère une famille constituée de 3 points $\{a_0, a_1, a_2\}$. On suppose que ces 3 points ne sont pas confondus.

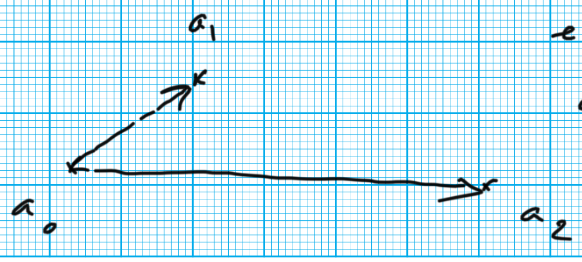
Soit V le ss esp. affine engendré par cette famille et posons $a = a_0$. D'après ce qui précède, la direction de V est le sev $\vec{V} = \text{Vect}\{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}\}$.

1er Cas $\overrightarrow{a_0a_1}$ et $\overrightarrow{a_0a_2}$ sont lin. dép.
Alors $\dim(\vec{V}) = 1$.



et alors V est une droite, qui contient a_0, a_1 et a_2.

2e Cas $\overrightarrow{a_0a_1}$ et $\overrightarrow{a_0a_2}$ ne sont pas lin. dépendants. Alors $\dim(\vec{V}) = 2$.



et V est un plan qui contient a_0, a_1 et a_2.

Définition 2.23 Soit E un e.a.

1. Une famille de points de E est dite **affinement génératrice** si le sous-esp. affine qu'elle engendre est E.
2. Une famille $\{a_0, \dots, a_k\}$ de points de E est dite **affinement libre** si le ssea qu'elle engendre est de dimension k.
3. Une famille $\{a_0, \dots, a_k\}$ de points de E est appelée un **repère affine** si elle est affinement libre et affinement génératrice.

Proposition 2.25 Soit E un e.a. de dim. n.

1. Si $\{a_0, \dots, a_k\}$ est un repère affine, alors $k = n$.
2. Soit $\{a_0, \dots, a_n\}$ une famille de points de E. Si $\{a_0, \dots, a_n\}$ est affinement libre, c'est un repère affine.
3. Soit $\{a_0, \dots, a_n\}$ une famille de points de E.

Alors $\Updownarrow$

(i) $\{a_0, \dots, a_n\}$ est aff. libre

(ii) " " " génératrice

(iii) " " un repère affine.

<u>Remarque 2.26</u> : Si E un e.a. de dim. n et soit $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un repère affine de E.

1. Si $a \in E$. On sait que $Aff(\{a_0, \ldots, a_n\})$ est E. Autrement dit, tt élt de E est ds le sous-esp. affine engendré par $\{a_0, \ldots, a_n\}$ autrement dit, tt élt de E est barycentre d'une famille pondérée $\{(a_0, \alpha_0), \ldots, (a_n, \alpha_n)\}$ pour les pondérations $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ bien choisies. Tout $n+1$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ comme ci-dessus est appelé système de coord. barycentriques de a.

2. <u>Attention</u> : si a est un point de E et si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ st deux syst. de coord. barycentriques, alors il existe un réel r non nul tq $\beta_i = r\,\alpha_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

Récip. : si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est un syst. de coord. baryc. pour le point a et si $r \in \mathbb{R}^*$, $(r\alpha_0, \ldots, r\alpha_n)$ en est aussi un.

<u>Définition 2.28</u> Soit E un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$. Un repère cartésien de E est la donnée d'un point O de E et d'une base $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ de $\vec{E}$.
On le note $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ et on appelle O l'origine du repère.

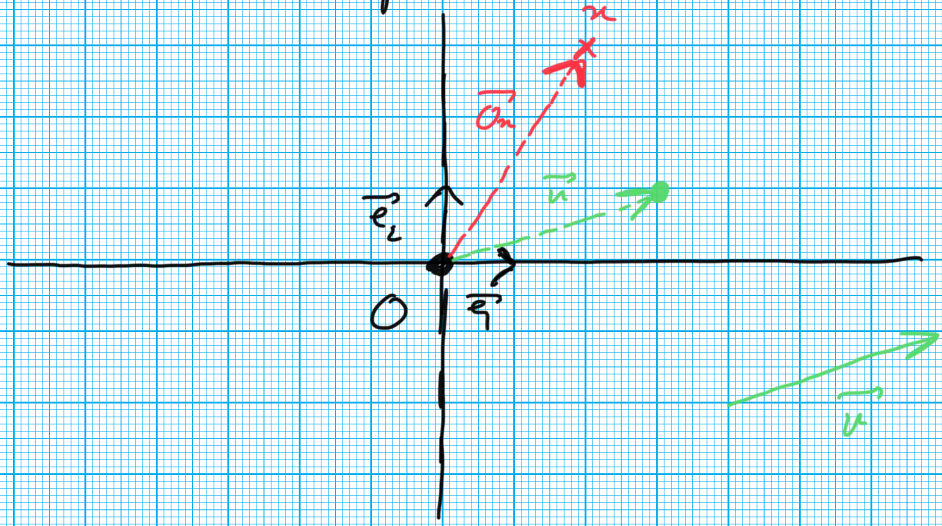
<u>Obs.</u> : Soit $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère cartésien et soit
$$\Phi_0 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \vec{E} \\ x & \longmapsto & \vec{Ox} \end{array}.$$
On sait que Φ_0 est une bijection et donc, à tout point x de E on peut associer, de façon unique, le vecteur $\vec{Ox}$ de $\vec{E}$.

<u>Définition 2.29</u> : Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère cartésien de l'e.a. E.
Si x est un point de E, on appelle coordonnées du <u>point</u> x dans le repère $\mathcal{R}$ les coord. du <u>vecteur</u> $\vec{Ox}$ dans la base $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$.

<u>Illustration</u> $E = \mathbb{R}^2$, $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

point

$\vec{e_1} = (1,0)$, $\vec{e_2} = (0,1)$. Alors $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère cartésien de l'e.a. $\mathbb{R}^2$.



Géom. affine | Géom vect.

Repère affine ⟷ Base

(coord. barycentriques) ⟷ (coord. ds une base)

Repère cartésien

$(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$

(coord. cartésiennes)

3. Applications affines.

Définition 3.1 : Soient E et F deux espaces affines et $f : E \to F$ une application. On dit que f est affine si elle a la propriété suivante : pour toute famille $\mathcal{F} = ((a_1, \alpha_1), \dots, (a_k, \alpha_k))$ de points pondérés de E tq $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$, l'image du barycentre g de $\mathcal{F}$ est le barycentre de la famille $((f(a_1), \alpha_1), \dots, (f(a_k), \alpha_k))$ de points pondérés de F.

Obs. : Soit $f : E \to F$ une application. Soit $a \in E$. On peut considérer les applications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[d, "\Psi_{f(a)}"] \\
\vec{E} \arrow[u, "\phi_a^{-1}"] \arrow[r, "f_a"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \vec{F}
\end{tikzcd}$$

(affine)

vectorialisation

(vectoriel)

$$f_a = \Psi_{f(a)} \circ f \circ \phi_a^{-1}$$

⚠ On considère ci-dessous les e.a. $(E, \vec{E}, \phi)$ et $(F, \vec{F}, \psi)$.

<u>Théorème 3.2</u> : ⚠ notations.

1. Soit $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) f est affine
(ii) f_a est linéaire
2. Si f est affine et si $a, b \in E$, alors $f_a = f_b$.

<u>Dém.</u> : exercice.

<u>Rmq 3.3</u> : Si $f : E \to F$ une application affine. Le théorème 3.2 dit qu'on peut lui associer une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ et que $\forall a \in E$, $\vec{f} = f_a$. On a alors, par définition :

$$\vec{f} = \psi_{f(a)} \circ f \circ \phi_a^{-1} .$$

Soit $x \in E$. On a :

$$\vec{f}(\vec{ax}) = \psi_{f(a)} \circ f \circ \phi_a^{-1}(\vec{ax}).$$
$$= \psi_{f(a)} \circ f(x)$$
$$= \psi_{f(a)}(f(x))$$
$$= \overrightarrow{f(a)f(x)}$$

et ceci est vrai pour $\forall a \in E$ et tout x de E. On a donc mq :

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad \overrightarrow{f(x)f(y)} = \vec{f}(\vec{xy}).}$$

<u>Déf. 3.4</u> Avec les notations ci-dessus, si $f : E \to F$ est une appl. affine, l'application $\vec{f}$ est appelée l'application linéaire associée à f.

Exemples 3.6

Soit E un e.a.

1. Translations. Si $\vec{u} \in \vec{E}$ et $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. On rappelle que si $x \in E$, $T_{\vec{u}}(x)$ est l'unique point y de E tq $\overrightarrow{xy} = \vec{u}$.

Soit $a \in E$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T_{\vec{u}}"] & E \arrow[d, "\phi_b"] \\
\vec{E} \arrow[u, "\phi_a^{-1}"] \arrow[r, dashed, "(T_{\vec{u}})_a"'] & \vec{E}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{b = T_{\vec{u}}(a)}$ c-à-d $\overrightarrow{ab} = \vec{u}$

Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. Il existe un unique point $x \in E$ / $\vec{v} = \overrightarrow{ax}$. Il existe aussi un unique y de E tq $\vec{u} = \overrightarrow{xy}$.

On a :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{by} &= \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{xy} \\
&= \cancel{-\vec{u}} + \vec{v} + \cancel{\vec{u}} \\
&= \vec{v}
\end{aligned}$$

On a mq $(T_{\vec{u}})_a(\vec{v}) = \vec{v}$ car $(T_{\vec{u}})_a = id_{\vec{E}}$.

Comme $id_{\vec{E}}$ est une application linéaire, le Thé. 3.2 assure que $T_{\vec{u}}$ est une application affine et que son application linéaire associée est $id_{\vec{E}}$.

2. Homothéties Soit O un point de E et $k \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre O et rapport k est l'appl.

$$h_{O,k} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

où $\overrightarrow{Oy} = k\,\overrightarrow{Ox}$.

On a :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h_{O,k}"] & E \arrow[d, "\phi_O"] \\ \vec{E} \arrow[u, "\phi_O^{-1}"] \arrow[r, dashed, "?"'] & \vec{E} \end{tikzcd}$$