$\boxed{\text{Exposé du } 09/03/21}$

Exemple 3.6 (suite) : On considère un point O de E et un réel k. On note $h = h_{O,k}$, l'homothétie de centre O et de rapport k. Le but est de mq h est une application affine et de calculer son appl. lin. associée (pour cela on utilisera le théorème 3.2).

On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\phi_O"'] & E \arrow[d, "\phi_O"] \\ \vec{E} \arrow[u, "\phi_O^{-1}"] \arrow[r, dashed, "(?)"'] & \vec{E} \end{tikzcd}$$

Il existe un unique x ds E tq $\boxed{\vec{u} = \vec{Ox}}$.
D'autre part, $h(x)$ est l'unique point y de E tq $\boxed{\vec{Oy} = k\vec{Ox}}$. Enfin $\phi_O(y) = \vec{Oy}$.

On a donc : $\phi_0 \circ h \circ \phi_0^{-1}(\vec{u}) = \phi_0 \circ h(x)$

$$= \phi_0(y)$$

$$= \overrightarrow{Oy}$$

Et $\overrightarrow{Oy} = k\,\overrightarrow{Ox} = k\vec{u}$.

On a donc mq, $\forall \vec{u} \in \vec{E}$,

$\phi_0 \circ h \circ \phi_0^{-1}(\vec{u}) = k\vec{u}$. Càd que

$$\phi_0 \circ h \circ \phi_0^{-1} = \underbrace{k\, id_{\vec{E}}}.$$

est une homothétie vectorielle (de rapport k) et donc une appl. lin.

Le Théorème 3.2 assure donc que h est une application affine et que son appl. lin. associée est $k\, id_{\vec{E}}$.

Prop. 3.7 : Soit E un e.a. et $f : E \to E$ une application affine telle que $\vec{f}$ soit l'homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{R}$.

1. Si $k = 1$, alors f est une translation de plus, c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$ où a est un élt arbitraire de E.
2. Si f admet un point fixe (càd un point qui est sa propre image par f), alors f est une homothétie de rapport k et dont ce point est le centre.
3. Si $k \neq 1$, f admet un point fixe unique et est l'homothétie de centre ce point fixe et de rapport k.

Point clé

Preuve : Rappelons que, puisque f est affine et que $k\,id_E$ est son appl. lin. ass., on a : $\forall x, y \in E$, $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \vec{f}(\overrightarrow{xy})$
$= k\overrightarrow{xy}$.

1. Si $k = 1$, pour $\underline{t}$ $x, y \in E$, on a donc $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{xy}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{yf(y)}$. Choisissons un point $a \in E$ arbitraire et posons

$\vec{u} = \overrightarrow{af(a)}$. Ce qui précède montre que, $\forall x \in E$ $\overrightarrow{xf(x)} = \vec{u}$! Ceci signifie que $f = T_{\vec{u}}$.

2. Si f admet un point fixe O. Alors, pour tout x de E,

$$\boxed{\overrightarrow{Of(x)} = \overrightarrow{f(O)f(x)} = \vec{f}\,(\overrightarrow{Ox}) = k\,\overrightarrow{Ox}}$$

Ainsi f est l'homothétie de centre O et rapport k.

3. Supp. $k \neq 1$. Soit $a \in E$ quelconque. Pour tout $x \in E$, on a $\overrightarrow{f(a)f(x)} = k\,\overrightarrow{ax}$.
Donc x est un point fixe de f

ssi $\overrightarrow{f(a)x} = k\,\overrightarrow{ax}$

ssi $\overrightarrow{f(a)a} + \overrightarrow{ax} = k\,\overrightarrow{ax}$

ssi $(1-k)\,\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{f(a)a}$

ssi $\overrightarrow{ax} = \frac{1}{1-k}\,\overrightarrow{f(a)a} = \frac{1}{k-1}\,\overrightarrow{af(a)}$

Un tel x existe et est unique.
On peut donc utiliser le point 2 de la proposition pour conclure que f est l'homoth. de centre cet unique point fixe, et de rapport k. ∎

Exercice 3.8 Appl. affine vis-à-vis des ssea.

Soient E, F des e.a. et $f : E \to F$ une appl. affine, dont $\vec{f}$ est l'appl. lin. associée.

1. On a les équiv. suivantes :
   - f est inj. **ssi** $\vec{f}$ est injective
   - f est surj. **ssi** $\vec{f}$ est surjective
   - f est bij. **ssi** $\vec{f}$ est bijective.
2. Si V est un ss-ea de E, alors $f(V)$ est un ssea de F. De plus, $\overrightarrow{f(V)} = \vec{f}(\vec{V})$.
3. Soit W un ssea de F. Alors $f^{-1}(W)$ est un ssea de E et $\overrightarrow{f^{-1}(W)} = \vec{f}^{-1}(\vec{W})$.
4. Si V et W sont deux sseap. aff. (faiblement) parallèles de E, alors $f(V)$ et $f(W)$ sont deux ss e.a. (faiblmt) parallèles.

Exercice 3.9 Appl. affines et composition.

1. St E, F, G des e.a. et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des appl. affines. Alors $g \circ f : E \to G$ est une appl. affine

et $\boxed{\overrightarrow{g\circ f} = \vec{g}\circ\vec{f}}$.

2. Soient E, F des e.a. et $f : E \to F$ une appl. affine bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ (cf. Ex. 3.8, point 1).

<u>Lemme</u> Soit E et F des espaces affines, $a \in E$, $b \in F$ et $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ une application linéaire. Il existe une appl. affine et une seule $f : E \to F$ tq $f(a) = b$ et $\vec{f} = \vec{f}$.

Le lemme ci-dessus permet de construire des appl. affines d'appl. lin. associée donnée. Il montre de plus qu'une appl. affine est complètement déterminée par son appl. lin. associée et l'image d'un point arbitraire.

<u>Proposition 3.11</u> Soit E un e.a. de dim n et F un e.a. et soit $\mathcal{R} = (a_0, \dots, a_n)$ un repère affine de E. Pour toutes famille $(b_0, \dots, b_n)$ de points de F, il existe

une application affine et une seule tq, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $f(a_i) = b_i$.

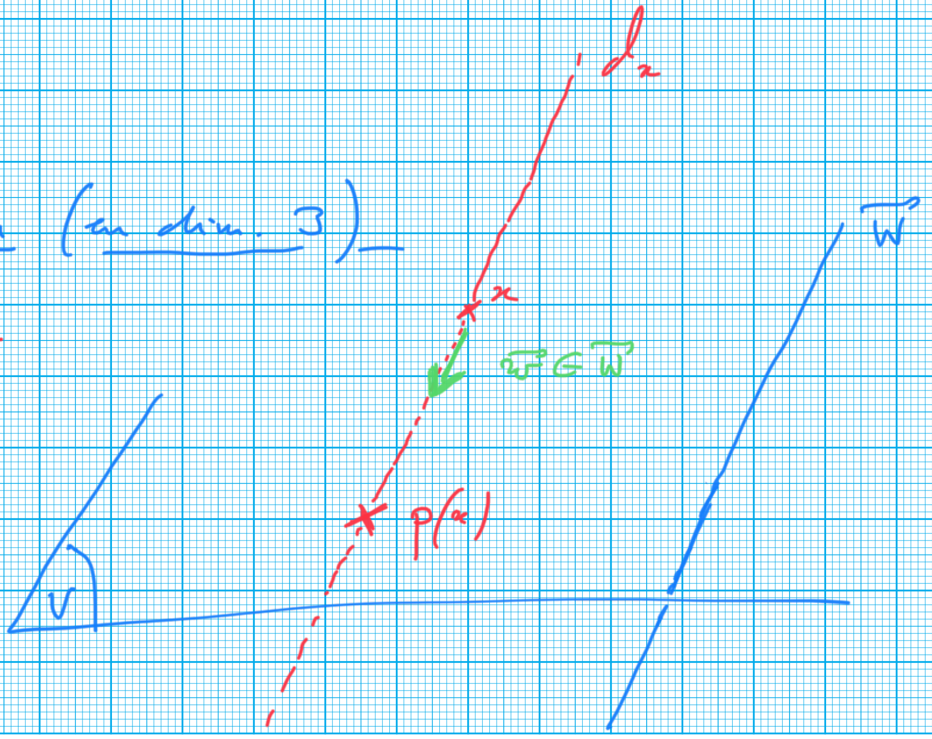
4. Projections, symétries, affinités.

Observation : Soit E un espace affine. On considère un ssea V de E et un sous-espace vectoriel $\vec{W}$ de $\vec{E}$ tq $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient suppl.

Soit x un point de E. On considère l'ens. $x + \vec{W} = \{ y \in E \,/\, \vec{xy} \in \vec{W} \}$; c'est un ss-esp. affine de E, de direct° $\vec{W}$. L'exercice 2.21 mq $x + \vec{W}$ intersecte V en un point et un seul.

Illustration (en dim. 3)

p : proj. sur V parall. à $\vec{W}$.



Définition 4.1 : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, V un s.e.a. de $\mathcal{E}$ et $\vec{W}$ un ssev de $\vec{\mathcal{E}}$ tq $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient supplémentaires.

On appelle projection sur V, parallèlement à $\vec{W}$ l'application

$$p_{V,\vec{W}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$x \longmapsto y$$

où y est l'unique point de l'ens. $(x+\vec{W}) \cap V$. (Cf. obs. précédente).

Théorème 4.2 Même notations qu'en 4.1.

1. L'application $p_{V,\vec{W}}$ est une application affine dont l'appl. linéaire associée est la projection vectorielle sur $\vec{V}$, parall. à $\vec{W}$.
2. Le sea V est l'ensemble des points fixes de $p_{V,\vec{W}}$, ainsi que son image.
3. On a $p_{V,\vec{W}} \circ p_{V,\vec{W}} = p_{V,\vec{W}}$.

Démonstration : On pose $p = p_{V,\vec{W}}$.

On fixe $a \in V$. Il est clair que l'on à $a = p(a)$. En effet $a \in a + \vec{W}$.

Considérons alors le diag. :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrr, bend left, mapsto] & E \arrow[r, "p"] & E \arrow[d, "\phi_a"] & y \arrow[d, mapsto] \\
\vec{u} \arrow[u, mapsto] & \vec{E} \arrow[u, "\phi_a^{-1}"] \arrow[r, dashed, "p_a"] & \vec{E} & \overrightarrow{ay}
\end{tikzcd}$$

Si $\vec{u} \in \vec{E}$. Il existe un unique x de E tq $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{ax}}$ càd que $x = \phi_a^{-1}(\vec{u})$.
Posons $y = p(x)$. Par définition, on a $y \in V$ et $\overrightarrow{xy} \in \vec{W}$. On a de plus $\overrightarrow{ay} \in \vec{V}$. Enfin, on a :

$$\vec{u} = \overrightarrow{ax} = \underbrace{\overrightarrow{ay}}_{\in \vec{V}} + \underbrace{\overrightarrow{yx}}_{\in \vec{W}}$$

et cette identité est donc la décomp. du $\vec{u}$ comme somme d'un elt de $\vec{V}$ et d'un elt de $\vec{W}$. Donc $\overrightarrow{ay}$ est le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{V}$ parallèlement à $\vec{W}$ pour la proj. vectorielle sur $\vec{V}$ parall. à $\vec{W}$.

Mais : $p_a(\vec{u}) = \overrightarrow{ay}$

Donc : $p_a(\vec{u})$ est le projeté de $\vec{u}$

sur $\vec{V}$, parallèlement à $\vec{W}$. Autrement dit $\vec{p_a}$ est la proj. sur $\vec{V}$ parall. à $\vec{W}$. En particulier, $\vec{p_a}$ est une application linéaire. Ceci mq (cf. Théo. 3.2) p est une appl. affine dont l'appl. lin. associée est la proj. (vect.) sur $\vec{V}$, parall. à $\vec{W}$.

2. On note $Fix(p)$ l'ensemble des points fixes de p :

$$Fix(p) = \{x \in E \,/\, p(x) = x\}.$$

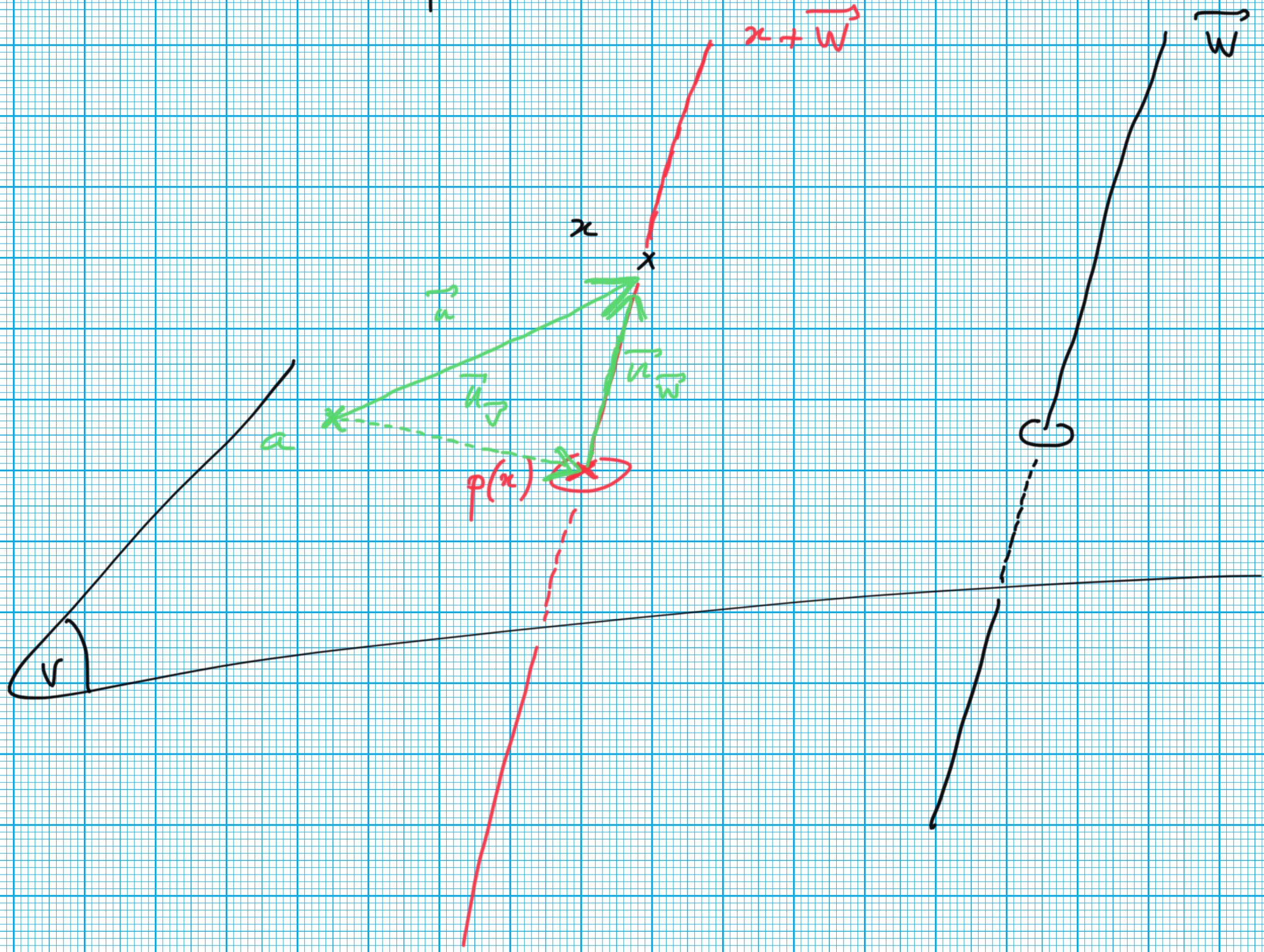
On a déjà vu que $V \subseteq Fix(p)$.

Supposons que x est un élt de $Fix(p)$, càd que $p(x) = x$. Alors avec les calculs ci-dessus, on a : $\vec{p}(\vec{ax}) = \vec{ax}$. En particulier, $\vec{ax} \in \vec{V}$. Mais $a \in V$. Donc $x \in V$. A ce stade, on a mq $Fix(p) = V$. Il est clair que $Im(p) \subseteq V$. Il est clair aussi que $V \subseteq Im(p)$ puisque $\forall$ élt de V est sa propre image par p.

3. Si $x \in E$. D'après ce qui précède, $p(x) \in V$ mais $V = Fix(p)$, donc $p(p(x)) = p(x)$. Autrement dit, $p \circ p(x) = p(x)$.

On a mq $p \circ p = p$. ▩

Illustration : (dim 3)



Théorème 4.3 Soit E un e.a. et $p : E \to E$ une application affine. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \circ p = p$;

(ii) $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ et p a un point fixe,

(iii) il existe un sea V de E et un sev $\vec{W}$ de $\vec{E}$ tq $p = p_{V,\vec{W}}$.

Dém. :

(i) $\Rightarrow$ (ii). Comme $p \circ p = p$, d'après l'ex. 3.9., on a : $\vec{p} \circ \vec{p} \overset{!!!}{=} \overrightarrow{p \circ p} = \vec{p}$

De plus, pour tout x de E $p(p(x)) = p(x)$ donc $p(x)$ est fixe.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On sait que $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$. Donc $\vec{p}$ est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(\vec{p})$, parall. à $\mathrm{Ker}(\vec{p})$. On sait par ailleurs que p admet un point fixe ; soit $a \in \mathrm{Fix}(p)$. On pose $V = a + \mathrm{Im}(\vec{p})$ et $\vec{W} = \mathrm{Ker}(\vec{p})$. On va mq $p = p_{V,\vec{W}}$.

Observons pour commencer que, $\vec{p}$ étant l'appl. lin. associée à p, $\forall x \in E$, on a :

$$\overrightarrow{a\,p(x)} = \overrightarrow{p(a)\,p(x)} = \vec{p}\left(\overrightarrow{ax}\right).$$

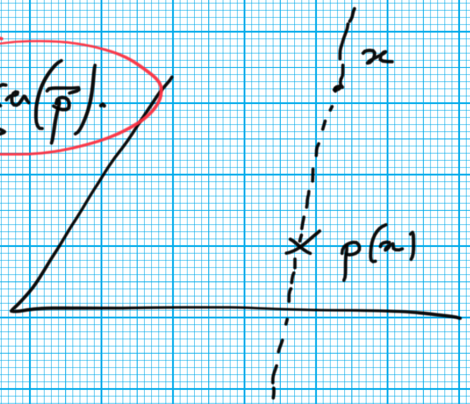
Ainsi, $\overrightarrow{a\,p(x)} \in \mathrm{Im}(\vec{p}) = \vec{V}$. Donc, comme $a \in V$, on doit avoir $p(x) \in V$.

Il reste à mq $\overrightarrow{x\,p(x)} \in \mathrm{Ker}(\vec{p})$.

Mais $\vec{p}\left(\overrightarrow{x\,p(x)}\right) = \overrightarrow{p(x)\,p(p(x))}$

$= \overrightarrow{p(x)\,p(x)}$

$= \vec{0}$.



Bilan : on a démontré que $\forall x \in \mathcal{E}$, $p(x) \in (x + \ker(\vec{p})) \cap V$. Par définition, cela signifie que $p(x)$ est la proj. sur V parallèlement à $\ker(\vec{p})$.

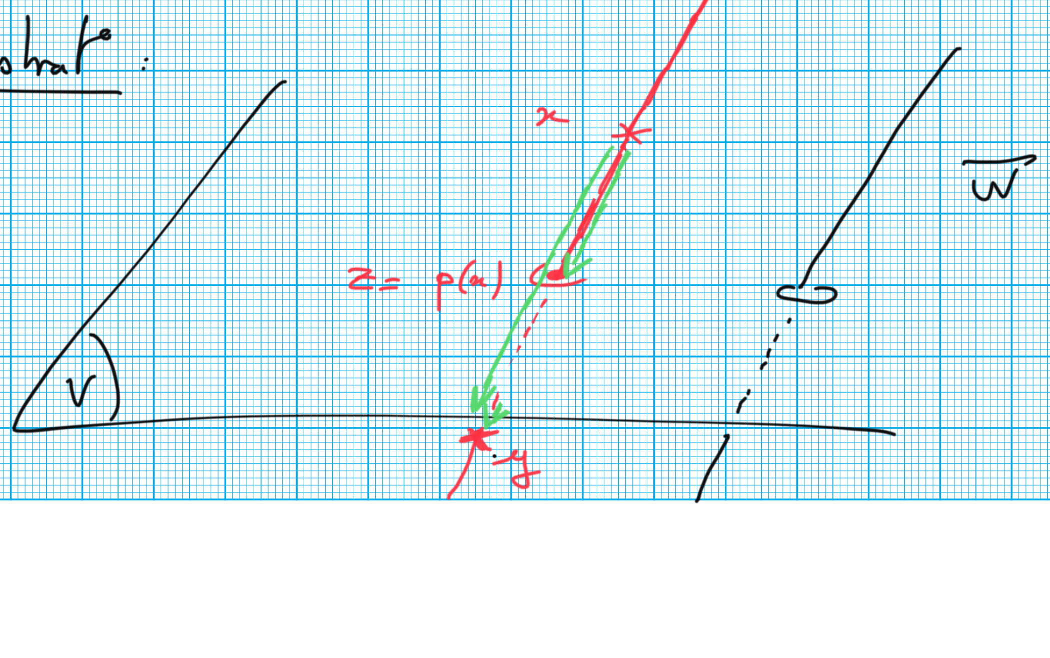
(iii) $\Rightarrow$ (i) Cela a déjà été démontré au théo. 4.2. ■

<u>Définition 4.4</u> : Soient $\mathcal{E}, V, \vec{W}$ comme ci-dessus. On appelle symétrie par rapport à V, parall. à $\vec{W}$ l'application

$$s_{V,\vec{W}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui à x ds $\mathcal{E}$ associe l'unique pt y de $\mathcal{E}$ tq $\vec{xy} = 2\vec{xz}$ où z est la proj. de x sur V parall. à $\vec{W}$.

<u>Illustrat°</u> :



Théorème 4.5 ⚠ notation.

1. L'appl. $s_{V,\vec{W}}$ est une application affine dont l'appl. lin. associée est la sym. vect. par rapport à $\vec{V}$, parall. à $\vec{W}$.
2. $V = \mathrm{Fix}\left(s_{V,\vec{W}}\right)$
3. $s_{V,\vec{W}} \circ s_{V,\vec{W}} = id_E$.

Théorème 4.6

Soit E un e.a. et $s: E \to E$ une application affine. Les assertions suivantes sont équiv. :

(i) $s \circ s = s$

(ii) $\vec{s} \circ \vec{s} = \vec{s}$ et s admet un pt fixe.

(iii) il existe un ssea V de E et un ssev $\vec{W}$ de $\vec{E}$ tq $s = s_{V,\vec{W}}$.