11/03/2021

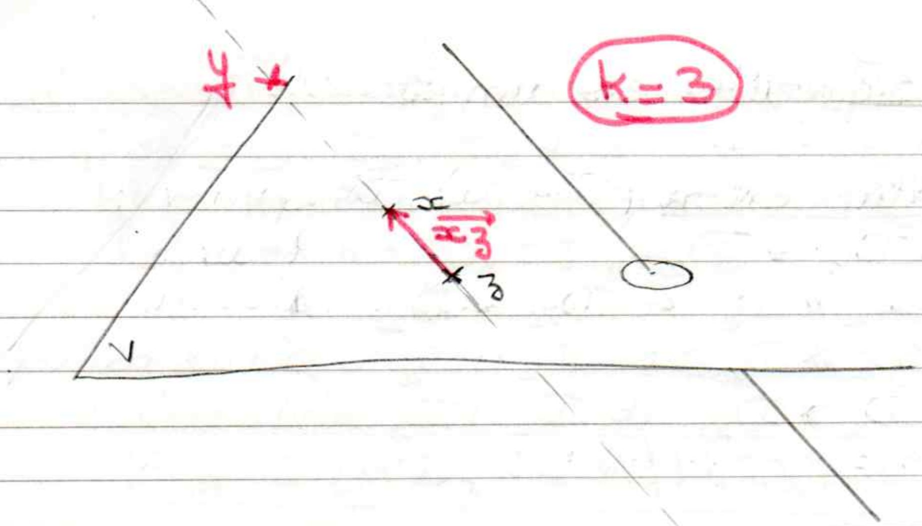
Rmq 4.7 : (Affinités vectorielles)
Soient E un ev., V et W des sev suppl. et $k \in \mathbb{R}$. On appelle affinité par rapport à V $/\!/^t$ à W et de rapport k l'unique app° lin $a : E \to E$ tq $a_{|V} = id_V$ et $a_{|W} = k\,id_W$.

On a donc

$$\begin{array}{rcl} a : E & \longrightarrow & E \\ \| & & \\ V \oplus W & & \\ \Psi & & \\ x = x_V + x_W & \longmapsto & x_V + k x_W \end{array}$$

Commentaire :
① Si $V = 0$, $a = k\,id_E$ → Homothéties
② Si $W = 0$, $a = id_E$ → Identités
③ Sinon, 1 et k sont v.p.
et si $k \neq 1$, ces v.p. sont distinctes.
Si bien que a est diag. et tq $Spec(a) = \{1, k\}$
(Si $k = 1$, $a = id_E$).
Réciproquement : Si f est un endo de E diag et tq $Spec(f)$ contient 2 él^{ts} distincts 1 et k ($k \neq 1$), alors c'est une affinité.
④ Si $k = 0$, a est la proj sur V, $/\!/^t$ à W
⑤ Si $k = -1$, a est la sym. par rapport à V, $/\!/^t$ à W.

Déf 4.8 : Soit E un e.a, V un sea de E, $\vec{W}$ un sev de $\vec{E}$ et $k \in \mathbb{R}$.
On appelle affinité par rapport à V, $/\!/^t$ à $\vec{W}$ et de rapport k l'app° $a_{V,\vec{W},k} : E \to E$ qui à tout x de E associe l'unique pt y de E tq $\vec{xy} = (1-k)\,\vec{xz}$ où z est la proj. de x sur V, $/\!/^t$ à $\vec{W}$.



Th 4.9 : $\hat{M}$ notations

1) L'app° $a_{V,\vec{W},k}$ est une app° affine et son app° linéaire associée est l'app° vect. par rapport à $\vec{V}$, $//^t$ à $\vec{W}$ de rapport k.

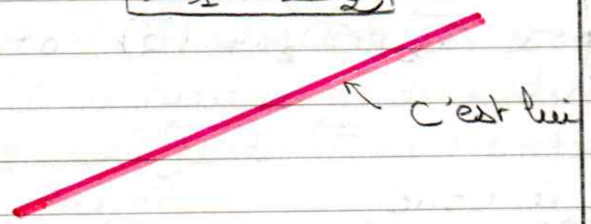
2) Si $k \neq 1$, $\mathrm{Fix}(a_{V,\vec{W},k}) = V$.

Démo : Exercice.

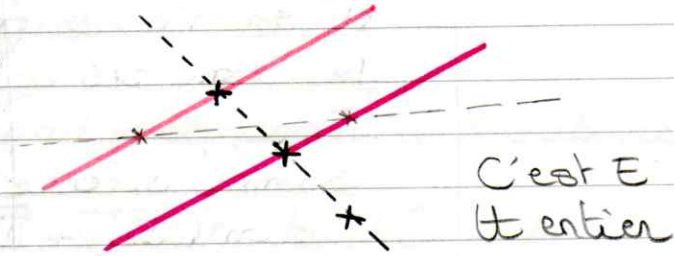
Exo 2.20 :

1) E : ea de dim 2 et $D_1, D_2 \subseteq E$ deux droites.
Décrire $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$.

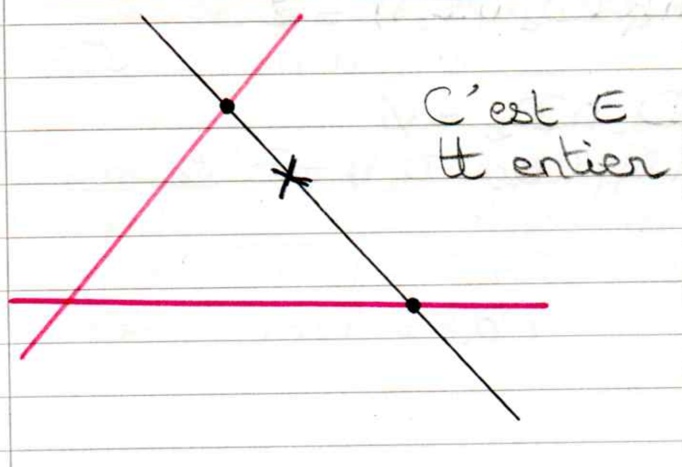
$\boxed{D_1 = D_2}$



$\boxed{D_1 // D_2 \text{ et } D_1 \neq D_2}$



$\boxed{D_1 \not\parallel D_2 ,\ D_1 \neq D_2}$



2) M̂ question en dim 3.

Illustration :

$\vec{D_1} = \vec{D_2}$
$\begin{cases} ① \ D_1 = D_2 \\ ② \ D_1 \parallel D_2 \text{ et } D_1 \neq D_2 \end{cases}$

$\vec{D_1} \neq \vec{D_2}$
$\begin{cases} ③ \ D_1 \nparallel D_2 \text{ et } D_1 \cap D_2 = \emptyset \text{ (cas non coplanaire)} \\ ④ \ D_1 \nparallel D_2 \text{ et } D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \end{cases}$

- 1° cas : $\vec{D_1} = \vec{D_2}$

Dans ce cas : $\vec{D_1} + \vec{D_2} = \vec{D_1} = \vec{D_2}$ donc :

- 1° ss-cas : $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
  Alors $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 1$ (Th d'incidence)

- 2° ss-cas : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
  Alors $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 2$ (Th d'inc.)

- 2° cas : $\vec{D_1} \neq \vec{D_2}$

On a :

$$\underbrace{(\vec{0})}_{\dim 0} \subseteq \underbrace{\vec{D_1} \cap \vec{D_2}}_{\dim ?} \ \substack{\overset{(*)}{\subseteq} \vec{D_1} \\ \overset{(*)}{\subseteq} \underbrace{\vec{D_2}}_{\dim 1}}$$

et si l'on suppose $\vec{D_1} \cap \vec{D_2} \neq (\vec{0})$, alors (*) sont des égalités et en particulier, $\vec{D_1} = \vec{D_2}$

Donc, dans le présent cas, $\vec{D_1}$ et $\vec{D_2}$ sont en somme directe et donc

$$\dim(\vec{D_1} + \vec{D_2}) = \dim(\vec{D_1} \oplus \vec{D_2}) = 2.$$

- 1° ss-cas : $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
  Alors $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 2.$

- 2° ss-cas : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
  Alors $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 3$

- <u>1er cas</u> : $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$
  - <u>1° ss-cas</u> : $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
    Alors nécessairement, on a $D_1 = D_2$
    (cf : soi $a \in D_1 \cap D_2$, $D_1 = \{T_{\vec{u}}(a), \vec{u} \in \overrightarrow{D_1}\}$
    $$\| $$
    $D_2 = \{T_{\vec{u}}(a), \vec{u} \in \overrightarrow{D_2}\}$)

    et alors :
    $$\boxed{Aff(D_1 \cup D_2) = Aff(D_1) = D_1}$$

  - <u>2° ss-cas</u> : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
    $Aff(D_1 \cup D_2)$ est un plan contenant D_1 et D_2.

- <u>2ème cas</u> : $\overrightarrow{D_1} \neq \overrightarrow{D_2}$, i.e. $D_1 \nparallel D_2$
  - <u>1° ss-cas</u> : $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
    $\left.\begin{array}{l} D_1 \subsetneq \\ D_2 \subsetneq \end{array}\right. Aff(D_1 \cup D_2) \longrightarrow$ unique plan contenant D_1 et D_2.
  - <u>2° ss-cas</u> : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
    Alors $Aff(D_1 \cup D_2) = E$.

<u>Exo 2.21</u> :
1) E un ea, V, W des sea tq $\vec{V} \oplus \vec{W} = \vec{E}$
<u>Pb</u> : Mq $V \cap W$ est un singleton.

<u>Obs 1</u> : Si on avait $V \cap W = \emptyset$, d'après le Th d'incidence, on devrait avoir
$$\dim(Aff(V \cup W)) = \dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1 = \dim(\vec{E}) + 1$$
$$= \dim E + 1$$
d'où, un sea de E de dim strict^t $\oplus$ grande que celle de E, ce qui est absurde.
Donc $V \cap W \neq \emptyset$.

<u>Obs 2</u> : Comme $V \cap W$ est non-vide et comme V et W sont des sea, $V \cap W$ est un sea (Th. 2.14). Et de plus, $\overrightarrow{V \cap W} = \vec{V} \cap \vec{W}$.
Donc $\overrightarrow{V \cap W} = \{\vec{0}\}$

Soit $a \in V \cap W$; un tel élément existe (cf obs 1)
On sait que
$$V \cup W = \{ T_{\vec{u}}(a), \vec{u} \in \overrightarrow{V \cap W} \}$$
$$\overset{\text{obs 2}}{=} \{ T_{\vec{u}}(a) = \vec{u}, \vec{u} \in \{\vec{0}\} \}$$
$$= \{a\}$$

2) $\longrightarrow$ Solution distribuée + tard.

Géométrie affine euclidienne

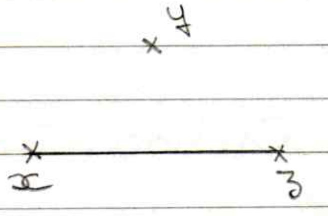
1. Espaces affines euclidiens

Déf 1.1 : Un e.a.e. est la donnée d'un ea $(E, \vec{E}, \phi)$ sur $\mathbb{R}$ et d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (f.b.s.d.p) qui munit $\vec{E}$ d'une structure d'eve.

Déf 1.3 : Soit E un eae
1) Un repère $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ de E est dit orthogonal (resp. orthonormal) si la base $(e_1, \dots, e_n)$ sous-jacente l'est.
2) Deux sea sont dits orthogonaux si leurs directions sont $\perp$.
3) Deux sea sont dits suppl. $\perp$ si leurs directions le sont.

Exo 1.4 : À faire seuls

Prop 1.5 : Soit E un eae.
L'app° $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto \|\vec{xy}\|$
est une distance sur E. Ainsi, (E, d) est un espace métrique.



$$\|\vec{xz}\| = \|\vec{xy} + \vec{yz}\| \leq \|\vec{xy}\| + \|\vec{yz}\|$$

Exo 1.6
1) Soit $\vec{u} \in \vec{E}$. La translation $T_{\vec{u}}$ conserve les distances au sens où :
$\forall x, y \in E,\ d(T_{\vec{u}}(x), T_{\vec{u}}(y)) = d(x, y)$

2) Si $O \in E$, $k \in \mathbb{R}$,
$d(h_{O,k}(x), h_{O,k}(y)) = |k|\, d(x, y)$.

Déf 1.2 : On y reviendra.

Th 1.8 : On y reviendra.

Déf 1.9 : Soit E un eae et V un sea.
1) La proj $\perp$ sur V est la proj. affine sur V, $/\!/^t$ à $(\vec{V})^\perp$.
2) La sym. $\perp$ par rapport à V est la sym. affine par rapport à V, $/\!/^t$ à $(\vec{V})^\perp$.
3) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'app° orthogonale par rapport à V et de rapport k est l'app° affine par rapport à V, $/\!/^t$ à $(\vec{V})^\perp$ et de rapport k.

Exo 1.10 : On y reviendra

Exo 1.11 : On y reviendra.

2. Isométries affines

Déf 2.1 : Soit E, E' deux eae dont on note d et d' les distances associées. Une application $f : E \to E'$ est appelée une isométrie si : $\forall x, y \in E$, $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Rmq : Une isométrie est nécessairement injective.

Déf 2.3 : Soit E un eae. On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries.

Rem 2.4 : Soit $\mathcal{E}$ un eve. de produit scalaire $(-,-)$ et de norme associée $\|-\|$.
1) $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $2(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$
2) Une app° lin. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est orthog. ssi elle conserve la norme (cf 1)
3) Si une app° qcq $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ conserve la norme, alors elle est nécessairement linéaire.

LM 2.5: Soit E un eae et $f : E \to E$ une isométrie
Alors, $\forall a \in E$, $f_a : \vec{E} \to \vec{E}$ conserve le ps :
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}, \ (f_a(\vec{u}), f_a(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})$

Th 2.6: Soit E un eae et une app° $f : E \to E$
(i) f est une isométrie
$\Updownarrow$
(ii) f est une app° affine tq $\vec{f} \in O(E)$