Exposé du 16 Mars 2021

2 Isométries affines.

Déf. 2.1 : Soient E et E' des espaces affines euclidiens, dont on note d et d' les distances respectives. Une isométrie de E ds E' est une application $f : E \to E'$ tq : $\forall x, y \in E$, $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Rmq 2.2 : Toute isométrie est inj.

Déf. 2.3 : St E un e.a.e. L'ensemble des isométries de E ds E sera noté $I_s(E)$.

Rmq 2.4 Soit E un e.v.e.

1. Identité de polarisation
2. L'identité de polarisation permet de montrer qu'un endo. de E est une isom. vectorielle ssi elle est orthogonale (càd. : elle respecte le p.s. ssi elle respecte la norme).

3- On montre facilement qu'une applicat° $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve le p.s. est nécessairement linéaire.

<u>Lemme 2.5</u> St $\mathcal{E}$ un e.a.e. et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie. Alors, pour tout $a \in \mathcal{E}$, f_a vérifie la pté suivante : pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$: $(f_a(\vec{u}) | f_a(\vec{v})) = (\vec{u} | \vec{v})$.

<u>Dém.</u> : On rappelle que f_a vérifie l'identité suivante : $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(x)f(y)} = f_a(\overrightarrow{xy})$.
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$, il existe x, y ds $\mathcal{E}$ tq $\vec{u} = \overrightarrow{ax}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ay}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
2\left(f_a(\vec{u}) \middle| f_a(\vec{v})\right) &= 2\left(f_a(\overrightarrow{ax}) \middle| f_a(\overrightarrow{ay})\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{f(a)f(x)} \middle| \overrightarrow{f(a)f(y)}\right) \\
&= -2\left(\overrightarrow{f(x)f(a)} \middle| \overrightarrow{f(a)f(y)}\right)
\end{aligned}
$$

polarisat° et rel. de Chasles

$$
\begin{aligned}
&= \|\overrightarrow{f(x)f(a)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(a)f(y)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{xa}\|^2 + \|\overrightarrow{ay}\|^2 - \|\overrightarrow{xy}\|^2
\end{aligned}
$$

Chasles $= \|\vec{xa}\|^2 + \|\vec{ay}\|^2 - \|\vec{xa} + \vec{ay}\|^2$

polar. $= -2(\vec{xa} \mid \vec{ay})$

$= 2(\vec{ax} \mid \vec{ay})$

$= 2(\vec{u} \mid \vec{v}).$ ■

<u>Théorème 2.6</u> : Soit E un e.a.e. et $f : E \to E$.

(i) f est une isométrie ;

$\Updownarrow$

(ii) f est affine et $\vec{f} \in O(\vec{E})$.

<u>dém.</u> : (ii) $\Rightarrow$ (i) : exercice facile.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On supp. que f est une isométrie. On fixe $a \in E$ et l'appl.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & E \arrow[d, "\Phi_{f(a)}"] \\ \vec{E} \arrow[u, "\Phi_a^{-1}"] \arrow[r, dashed, "f_a"'] & \vec{E} \end{tikzcd}$$

Le lemme 2.5 assure que f_a conserve le produit scalaire. Donc, d'après la

Remarque 3.4, $\vec{f_a}$ est linéaire.
Preuve : f est affine et $\vec{f} = \vec{f_a}$.
Mais alors $\vec{f}$ conserve le p.s. càd que $\vec{f} \in O(\vec{E})$. ∎

On déduit facilement de ce qui précède que $Is(E)$ est un groupe pour la composition et que l'application (cf Théo. 2.6)

$$\theta_E : Is(E) \longrightarrow O(\vec{E})$$
$$f \longmapsto \vec{f}$$

est un morphisme de groupe.

⚠ θ_E est surjective (ex. simple) mais pas injective. Par exemple, toutes les translat° sont des élts de $Is(E)$ et elles ont toute la m̂ appl. lin. associée, à savoir $Id_{\vec{E}}$.

On appelera isométrie positive (resp. nég.) un élt f de $Is(E)$ tq $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$ (resp. $\vec{f} \in O^-(\vec{E})$).

On note $Is^+(E)$ (resp. $Is^-(E)$) l'ens. des isométries positives (resp. négatives) et on a :

$$Is(E) = Is^+(E) \sqcup Is^-(E).$$

et $Is^+(E)$ est un s-gpe de $Is(E)$.

<u>Exercice 2.7</u> Sit E un e.a. et $f : E \to E$ une application affine. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in E / \ f(x) = x\}$.

1. $\mathrm{Fix}(f)$ est soit vide, soit un s-esp affine de direction $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.
2. On suppose E de dim. finie. Alors :

   (i) $\mathrm{Fix}(f)$ est un singleton ;

   $\Updownarrow$

   (ii) $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$.

Comm. : 1. et (i) $\Rightarrow$ (ii) st faciles. Pour (ii) $\Rightarrow$ (i) utiliser le théorème du rang pour mq $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ est une bijection.

Théorème 2.8 : Soit E un e.a.e. et $f \in Is(E)$.

1. On a $\vec{E} = \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.
2. Il existe un unique couple $(\vec{u}, g)$ où $\vec{u}$ est un élt de $\vec{E}$ et g est une isométrie de E tq

(i) $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$;

(ii) g admet un point fixe ;

(iii) $\boxed{f = g \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ g.}$

↳ dit que : f se décomp. comme composition d'une iso. g $\boxed{\text{sympathique}}$ (càd avec des points fixes) et d'une transl.

Comm. Si E est un espace affine et $f : E \to E$ une application affine et si f admet un point fixe a.

Alors : $\forall x \in E$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{a f(x)} = \overrightarrow{f(a) f(x)} = \vec{f}(\overrightarrow{ax})}$$

Ce qui ramène le calcul de $f(x)$ à celui de $\vec{f}(\overrightarrow{ax})$.

Ainsi : si l'on connaît un point fixe de f, la détermination de f se ramène à celle de sa partie linéaire $\vec{f}$.

Classification des isométries en dim 2.

On ~~c~~ un e.a.e. E de dim 2, on note $\vec{E}$ sa direction (c'est donc un e.v.e. de dim 2). On ~~c~~ une base orthon. $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\vec{E}$ de référence avec laquelle on oriente $\vec{E}$. On ~~c~~ $f : E \to E$ une isométrie.

__1er cas__ $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$ (cad $f \in Is^+(E)$).

__1er sous-cas__ $\vec{f} = id_{\vec{E}}$. On sait qu'alors f est une translation (cf. Chap VII, Prop. 3.7).

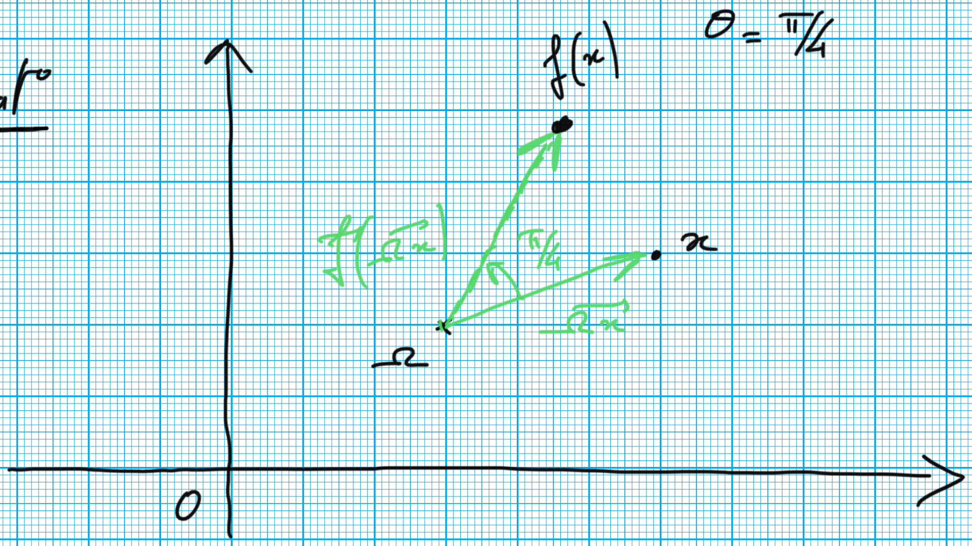
__2e sous-cas__ $\vec{f} \neq id_{\vec{E}}$. Il en résulte qu'il existe un réel θ de $]0, 2\pi[$ tq la matrice de $\vec{f}$ de toute b.o.n.d. soit R_θ (cf. chap VI) et que 1 n'est pas v.p. Donc $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$. Par csq $\mathrm{Fix}(f)$ est un singleton (cf. Ex. 2.7).

Soit Ω le point fixe de f.
Alors : $\forall x \in E$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega f(x)} = \vec{f}(\overrightarrow{\Omega x})}$$

où $\vec{f}$ est la rotat° vectorielle de même d'angle θ.

<u>Illustrat°</u>

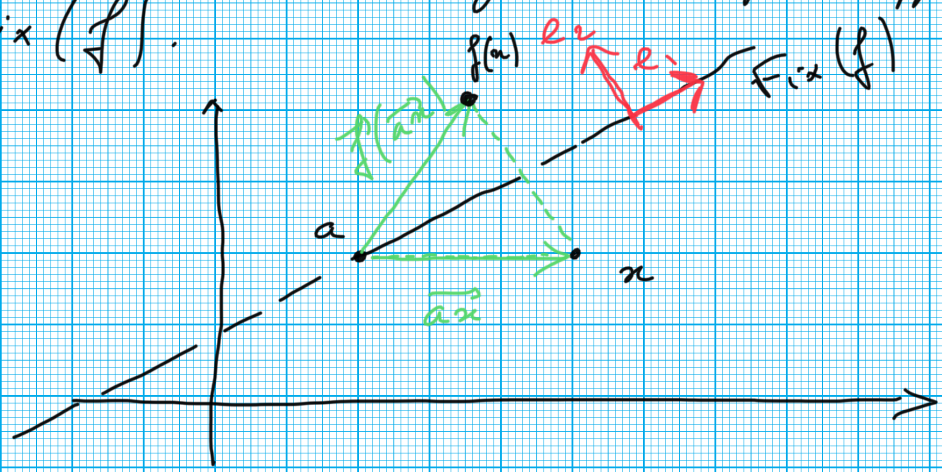


<u>2ᵉ Cas</u> $\vec{f} \in Is^-(\vec{E})$.

On sait qu'alors, il existe une base orthonormée de $\vec{E}$ tq dans cette base la matrice de $\vec{f}$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1^{er} sous-cas $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Soit a un point fixe de f. On sait qu'alors $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite affine de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ (cf. Ex. 2.7). Les théorèmes 4.5 et 4.6 du chapitre VII, on obtient que f est la sym. $\perp$ par rapport à $\mathrm{Fix}(f)$.



2^{e} sous-cas $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

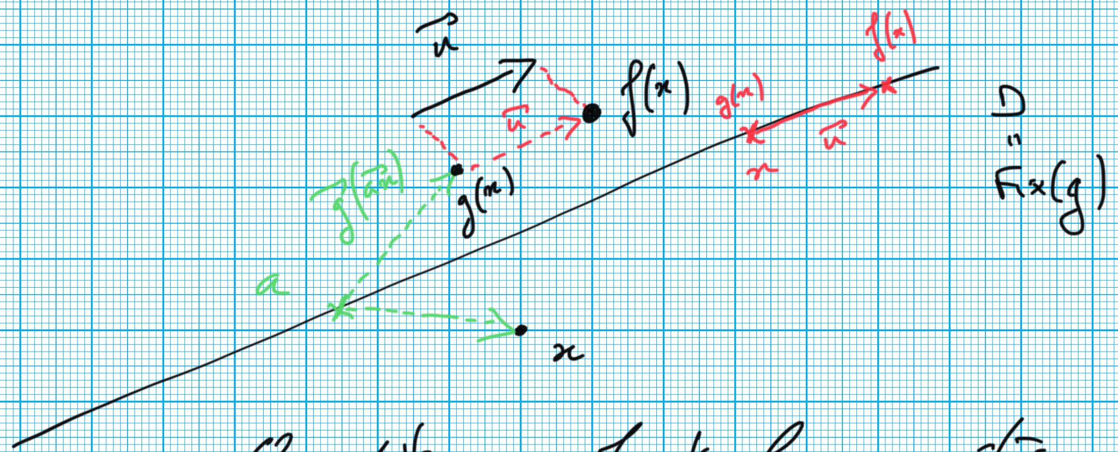
Le théorème 2.8 assure qu'il existe un couple (unique) $(\vec{u}, g)$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ g isométrie tq $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$ et $f = T_{\vec{u}} \circ g = g \circ T_{\vec{u}}$.

On a donc $\vec{g} = \vec{f}$ et g est une isométrie négative ayant au moins un pt fixe. C'est donc une sym. affine $\perp$ par rapport à $\mathrm{Fix}(g)$ qui est une droite affine de direction $\ker(\vec{g} - id_E) = \ker(\vec{f} - id_E)$.

De plus, $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - id_E)$ et

$$f = T_{\vec{u}} \circ g = g \circ T_{\vec{u}}.$$

Donc f est la composée d'une sym. affine $\perp$ et d'une translation dont le vecteur est dans la direction de la droite par rapp. à laquelle on prend la sym.



On dit que f est la symétrie glissée d'axe D et de vecteur $\vec{u}$.

Exercice 6.24, chapitre II.

E est l'e.v.e. de dim 2, $\mathbb{R}^2$ mun. de son orientation standard. On a alors une application comme suit :

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow O^+(E)$$
$$\theta \longmapsto r_\theta$$

où r_θ est la rotation de E dont θ est la mesure d'angle ds lte b.o.n.d. Autrement dit : r_θ est l'applicat° lin. dont la matrice dans toute b.o.n.d. est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cette application est surjective. Mais elle n'est pas injective. En fait θ et θ' ont la même image ssi $R_\theta = R_{\theta'}$ ssi $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ ssi $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Il découle de ce qui précède que la restriction de a à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est une bijection.

n'est pas un gpe

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi[} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rr, bend left, "\text{bij.}"] & \mathbb{R} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & O^+(E) \\
& \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \arrow[ur, "\text{bij.}", "\bar{a}"'] &
\end{tikzcd}$$

morphisme de gpe.

$\boxed{\text{groupe}}$

<u>Obs. 1</u> : Si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$

(cf. : $R_{\theta+\theta'} = R_\theta \cdot R_{\theta'}$). Donc a est un morphisme du gpe $(\mathbb{R}, +)$ vers le gpe $(O^+(E), +)$.

<u>Obs. 2</u> : Sur l'ens. $\mathbb{R}$, on peut déf. une rel. d'équiv. dite " de congruence modulo 2π ". Deux nombres réels sont

en relation pour cette rel. d'équiv. si leur diff. est un multiple entier de 2π. Autrement dit, si $x, x' \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} x'$ si $x' - x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble quotient pour cette relation d'équivalence reste un groupe pour l'addition suivante : si $x, x' \in \mathbb{R}$ et si $\bar{x}$ et $\overline{x'}$ sont les classes de x et x' pour cette rel. d'équiv. leur somme est définie par :

$$\bar{x} + \overline{x'} = \overline{x + x'} .$$

De cette façon, on permet d'associer à toute rotation une <u>unique</u> classe d'équiv. de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ appelée sa mesure d'angle.

<u>Note</u> : souvent, par abus de langage, on appelle mesure d'angle d'une rotation r l'unique réel θ de $[0, 2\pi[$ tq $r = r_\theta$.
<u>Attention</u> : tout autre réel θ' tq θ et θ' soient congrus modulo 2π vérifie alors $r = r_{\theta'}$.

Exercice 6.29, chap. VI : sur la notion d'angle orienté de vecteurs.

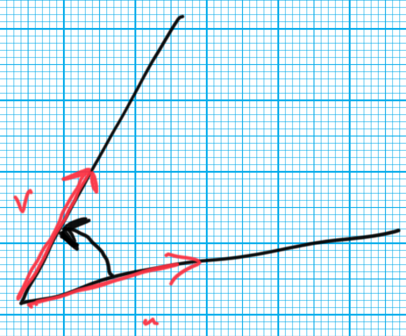
Rappel : (cf. ex. 6.26, Chap. VI).

Si u et v sont des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, il existe une unique rotat° r de l'e.v.e. $\mathbb{R}^2$ tq $v = r(u)$.

rotation

On note $\widehat{(u,v)}$ la rotation r en question et on appelle cette rotation l'angle orienté de (u,v).

La rotation r mentionnée ci-dessus a une mesure d'angle qui est l'unique réel θ (modulo 2π) tq $r = r_\theta$.



nombre réel ou une classe modulo 2π de nbre réel.

On pose alors $\mathrm{mes}\,\widehat{(u,v)}$ cette mesure et on l'appelle mesure de l'angle orienté $\widehat{(u,v)}$.

Bilan : soient u, v deux vecteurs unitaires

$\widehat{(u,v)}$ est l'unique rotat° r tq $v = r(u)$

mes $\widehat{(u,v)}$ est la mesure de $\widehat{(u,v)}$; c'est donc un nombre réel ou une classe de nbre réel modulo 2π.

Rappel sur la notion d'affixe (d'un point ou d'un vecteur).

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bijection}} \mathbb{C}$$
$$(a,b) \longmapsto a+ib$$

géométrique | algébrique

$\rightsquigarrow$ e.v.

$\rightsquigarrow$ e.a.

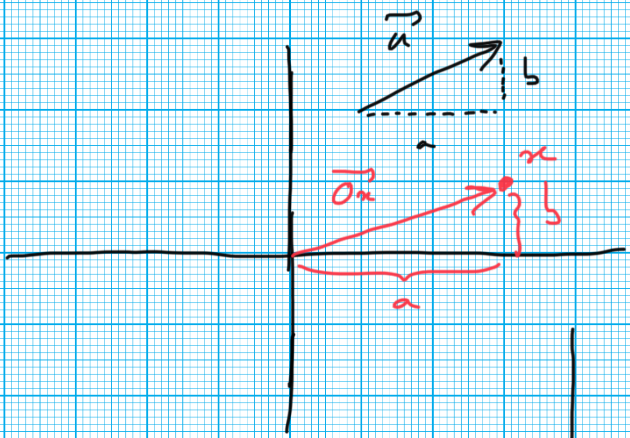
$\mathbb{R}^2$ comme e.v.e. de base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\mathbb{C}$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a,b)$ $\Longrightarrow$ $z_{\vec{u}} = a + ib$

$\mathbb{R}^2$ comme e.a.e rapporté au Repère orthon. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$x = (a,b)$ $\Longrightarrow$ $a + ib$



$a + ib$

$a + ib$.

On se place ds $\mathbb{R}^2$ e.a.e. orienté de la façon usuelle.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on considère la rotation affine r de $\mathbb{R}^2$ de centre Ω et de mesure d'angle θ.

Autrement dit : $\vec{r} = r_\theta$ est la rotation vectorielle dont la matrice ds toute base orthonormée directe est $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

<u>Question</u> : Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (un point). Peut on exprimer l'affixe de $r(x,y)$ en fonction de l'affixe de (x,y) ?

<u>Réponse : OUI</u>

On note ω l'affixe de Ω. Donc, si $\Omega = (a, b)$, on a $\omega = a+ib$.

Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$

d'affixe $z = \boxed{x + iy}$

et $M' = (x', y')$ son image par r.

d'affixe $z' = \boxed{x' + iy'}$

On va voir que l'on a l'identité suivante

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$$

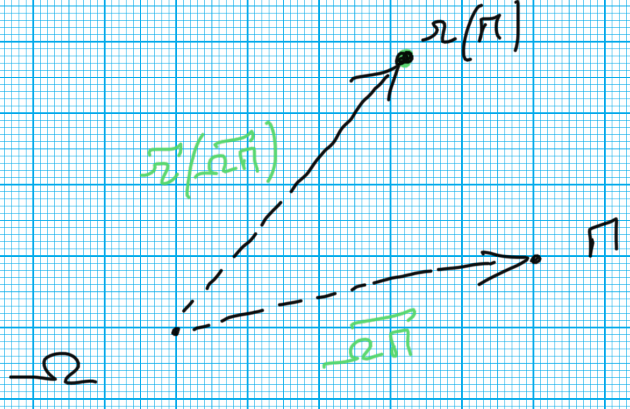
Formule algébrique.

c.à.d : $\quad z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$

En effet : par définition de r, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega\, r(M)} = \overrightarrow{r(\Omega)\, r(M)} = \vec{r}(\overrightarrow{\Omega M})}$$

Formule vectorielle



La formule vectorielle explicitée avec les coord. des vecteurs concernés ds la base $(\vec{i}, \vec{j})$ s'écrit matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de } \overrightarrow{\Omega r(M)} \\ \text{ds } (\vec{i}, \vec{j})}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \vec{r} \text{ ds } (\vec{i}, \vec{j})}} \underbrace{\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \overrightarrow{\Omega M} \text{ ds } (\vec{i}, \vec{j})}}$$

donc
$$\begin{cases} x' - a = (\cos\theta)(x-a) - (\sin\theta)(y-b) \\ y' - a = (\sin\theta)(x-a) + (\cos\theta)(y-b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z' - \omega &= (x'-a) + i(y'-b) \\ &= \Big[\underline{(\cos\theta)(x-a)} - \underline{(\sin\theta)(y-b)} \Big] \\ &\qquad + i \Big[\underline{(\sin\theta)(x-a)} + \underline{(\cos\theta)(y-b)} \Big] \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)\Big[(x-a) + i(y-b)\Big] \end{aligned}$$

On vient de mq

$$\boxed{z' - \omega = \left(e^{i\theta}\right)\left(z - \omega\right).} \quad (*)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \ni M & \xrightarrow{\text{affixe}} & z \in \mathbb{C} \\ & & \big\downarrow (*) \\ \mathbb{R}^2 \ni M' & \xleftarrow[\text{en sens inv.}]{\text{affixe}} & z' \in \mathbb{C} \end{array}$$