Exposé du 18 mars 2021

On revient à la classification et à l'étude des isométries vectorielles d'un e.v.e. de dim. 3.

<u>Ex. : VI. 6. 22</u> On considère l'endo. u de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative ds la base canonique est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Pb</u> : décrire géométriquement u.

① u est-il un élt de $O(E)$?
Il est facile de vérifier que ${}^tAA = I_3$.
Comme A est la matrice de u dans une b.o.n., on en déduit que $u \in O(E)$.

② u est-il ds $O^+(E)$ ou $O^-(E)$?
On calcule $\det(A)$.

On a :

$$\det(A) = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 9 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^2}\left[4\times 8 + 7\times 7 \right]$$

$$= 1.$$

Donc $\det(u) = 1$. A ce stade on sait que $u \in O^+(E)$.

<u>Note</u> : il est clair que $u \neq id_E$.

<u>Donc</u> : u est une rotation d'axe $\ker(u - id_E)$ et de mesure d'angle (relative au choix d'un vecteur $\vec{v}$ normé de $\ker(u-id_E)$) non nulle.

③ Recherche de l'axe : $\ker(u-id_E)$.

On $\tilde{c}$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

$(x,y,z) \in \ker(u - id_E)$

$$\iff u((x,y,z)) = (x,y,z)$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 8x + y - 4z = 9x \\ -4x + 4y - 7z = 9y \\ x + 8y + 4z = 9z \end{cases}$$

$$\iff \dots \iff \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

On a donc $\ker(u-id_E) = \{(-3\lambda, \lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(f_1)$ où $f_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,-1)$

④ On oriente l'axe de rotation par $\boxed{f_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,-1)}$

On sait alors qu'il existe un unique réel $\theta \in \,]0, 2\pi[$ tq dans toute b.o.n.d. commençant par f_1, la matrice de a sera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Construisons une b.o.n.d. commençant par f_1. On peut par exemple choisir

$\boxed{f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)}$. On cherche ensuite

$$f_3 = (a, b, c) \quad \text{tq} \quad \begin{cases} 3a - b - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

Par ex. $\boxed{f_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 3, 3)}$ convient.

Posons $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. C'est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ et

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 0 & 2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}$$

On trouve facilement que $\det(P) = 1$.
Donc, par définition, $\mathcal{F}$ est une b.o.n.d. (pour l'orientation standard de l'e.v.e. $\mathbb{R}^3$)

Pour obtenir la valeur de θ, il suffit d'exploiter le fait que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

càd
$$\begin{cases} u(f_1) = f_1 \\ u(f_2) = (\cos\theta) f_2 + (\sin\theta) f_3 \\ u(f_3) = (-\sin\theta) f_2 + (\cos\theta) f_3 \end{cases}$$

On a : $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_3$.

$$u(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(e_2) - u(e_3)\right)$$
$$= \frac{1}{9\sqrt{2}}\left(5e_1 + 11e_2 + 4e_3\right).$$

Mais, comme P est une matrice orth. on a ${}^tP = P^{-1}$ et par q

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{11} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{22} & 3/\sqrt{22} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad e_1 \quad & \quad e_2 \quad & \quad e_3 \quad \end{matrix} & \end{array}$$

Donc : $\underbrace{9\sqrt{2}} \cdot u(f_2) = 5e_1 + 11e_2 + 4e_3$

$$= 5\left(\cancel{3/\sqrt{11}\, f_1} + 2/\sqrt{22}\, f_3\right)$$
$$+ 11\left(\cancel{-1/\sqrt{11}\, f_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2 + 3/\sqrt{22}\, f_3\right)$$
$$+ 4\left(\cancel{-\frac{1}{\sqrt{11}} f_1} - 1/\sqrt{2}\, f_2 + 3/\sqrt{22}\, f_3\right)$$
$$= \frac{7}{\sqrt{2}} f_2 + \frac{55}{\sqrt{22}} f_3$$

Donc : $$u(f_2) = \underbrace{\frac{7}{18}}_{\cos\theta} f_2 + \underbrace{\frac{55}{18\sqrt{11}}}_{\sin\theta} f_3$$

On déduit de cela que θ est l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tq

$$\cos\theta = 7/18$$

$$\sin\theta = 55/18\sqrt{11}.$$

<u>Concl.:</u> u est donc la rotation d'axe $\mathbb{R} f_1$ dont la mesure d'angle relative au choix de f_1 pour orienter l'axe est l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tq $\cos\theta = 5/18$ et $\sin\theta = 55/18\sqrt{11}$.

On considère maintenant l'endo. u de $\mathbb{R}^3$ tq

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Il est facile de vérifier que ${}^tAA = I_3$ et que $\det(A) = -1$.

Donc $u \in O^-(E)$. De plus $u \neq -id_{\mathbb{R}^3}$.

(2) On sait que $\ker(u+id_E)$ est une droite vectoriel. On vérifie facilement que, si $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, on a :

$$\ker(u+id_E) = \mathbb{R} f_1 .$$

(3) On sait alors (cf. cours) qu'il existe une unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tq la matrice de u dans toute b.o.n.d. commençant par f_1 soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

On peut considérer les vecteurs $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$; alors $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une b.o.n. directe.

On a alors $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

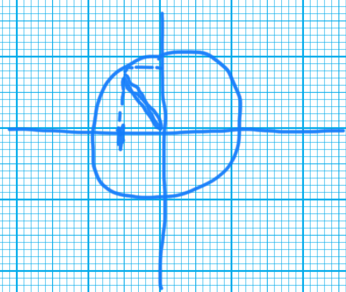
et $P^{-1} = {}^tP$.

La mesure d'angle θ cherchée est donc telle que $u(f_2) = (\cos\theta) f_2 + (\sin\theta) f_3$ et on trouve :

$$u(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_2 - e_3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} f_2 + \frac{3}{\sqrt{6}} f_3\right)$$

$$= \overbrace{-\frac{1}{2}}^{\cos\theta} f_2 + \overbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin\theta} f_3$$



Donc $\theta = 2\pi/3$.

<u>Ccl :</u> u est l'endo. orthogonal de déterminant -1 (antirotation) dont l'axe est $\mathbb{R} f_1$ et dont la matrice de toute b.o.n.d. commençant par f_1 est

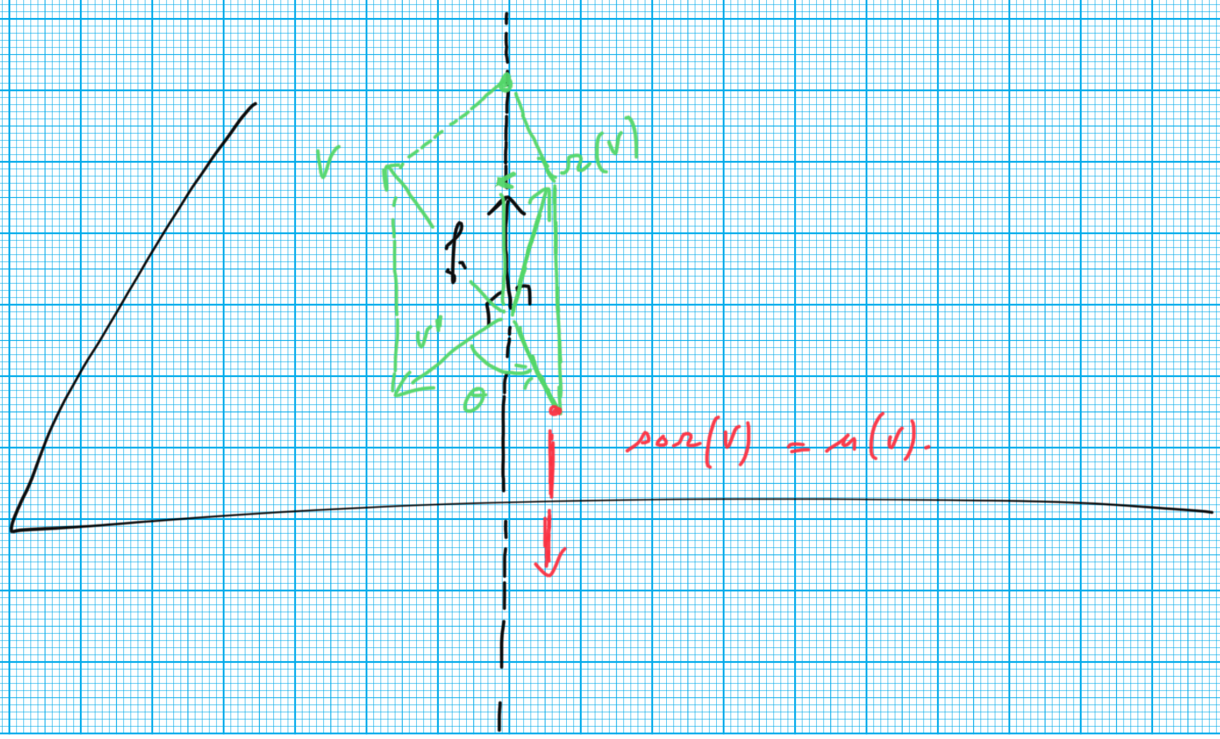
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observation (complément de cours) :

On a bien sûr :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc : si s est la réflexion par rapport au plan $(\mathbb{R}f_1)^\perp = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ et si r est la rotation d'axe $\mathbb{R}f_1$ et dont la mesure d'angle associée à f_1 est θ, on a : $\boxed{u = s \circ r.}$



On considère maintenant l'endo. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Pb</u> : décrire u géom.

(1) On constate que ${}^tAA = 16\, I_3$.

Ce dont on déduit que ${}^t\left(\frac{1}{4}A\right)\left(\frac{1}{4}A\right) = I_3$.

Cela incite à considérer l'endo.

$$v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

défini par $v = \frac{1}{4}u$.

Alors $$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Et : ${}^tBB = I_3$. Donc, comme $\mathcal{E}$ est une b.o.n., v est une isométrie vectorielle. De plus $\det(v) = -1$.

À ce stade on voit donc que $v \in O^-(E)$.

Et on constate aussi que v est un endo.

symétrique. En effet, sa matrice B de la b.o.n. $\mathcal{E}$ est symétrique. Donc v est une réflexion.

Par csq v est la réflexion par rapport à $\ker(v - id_E)$.

On peut alors calculer $\ker(v - id_E)$ et $\ker(v + id_E)$. On obtient que $\ker(v + id_E) = \mathbb{R} f_1$ pour un certain $f_1 \in \mathbb{R}^3$. Puis que $\ker(v - id_E) = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ pour f_2 et f_3 bien choisis. On peut d'ailleurs faire cela de sorte que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ soit orthogonale.

(2) Par ailleurs, $u = 4v$. C.à.d que $u = (4\, id_E) \circ v$. Ainsi u est la composée de l'homothétie vectoriel de rapport 4 et de la réflexion v.