Exposé du 19/03/21

Exercice 6.23 du Chap. VI

$E = \mathbb{R}^3$ e.v.e. standard, orienté par la b.c.

r : rotation d'axe dirigé par $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$

et de mesure d'angle $2\pi/3$.

Par définition, r est l'endo. de $\mathbb{R}^3$ qui admet pour matrice ds toute b.o.n.d. qui commence par f_1 la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ où } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

On peut vérifier facilement que, en posant $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$, la famille

$\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une b.o.n.d. et la matrice de r relat. à $\mathcal{F}$ est donc comme ci-dessus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} ;$$

avec en outre $\quad P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad f_1 & \quad\quad f_2 & \quad\quad f_3 \end{matrix} & \end{array}$

et $\quad P^{-1} = {}^tP$.

On a donc $\quad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(r)}_{\text{on a !}} = P^{-1} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r)}_{\text{on veut !}} P$.

c-à-d : $\quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r) = P \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(r) \, P^{-1} = P \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(r) \, {}^tP}$

On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On trouve finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

<u>Obs.</u> : une fois calculée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r)$, on peut vérifier que $r(f_1) = f_1$.

<u>Exercice VI. 6.27</u> E e.v.e. de dim. 2

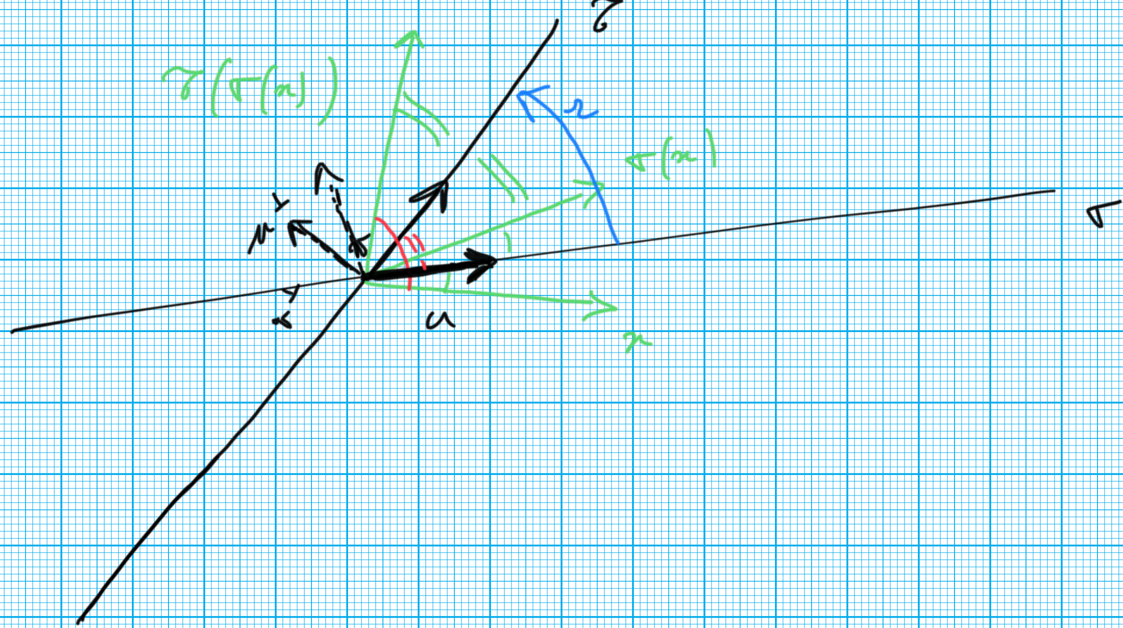
1. Si σ et σ' sont des réflexions, càd des élts de $O^-(E)$, on a $\det(\sigma) = \det(\sigma') = -1$.
Donc $\sigma\sigma' \in O(E)$ (car $O(E)$ est un gpe) et $\det(\sigma\sigma') = (-1)(-1) = 1$ et donc $\sigma\sigma' \in O^+(E)$.
Donc, par déf., $\sigma\sigma'$ est une rotation.

On se donne deux réflexions σ et τ

avec : σ réflexion par rapport à $\mathbb{R}u$

τ " " " " $\mathbb{R}v$

où u et v sont des vecteurs unitaires.



Pb : décrire $\tau \circ \sigma$. On constate graphiquement que r devrait être la rotation de mesure d'angle 2θ où θ est la mesure d'angle $\operatorname{mes}(\widehat{u, v})$.

On note $\mathcal{U} = (u, u^\perp)$ la b.o.n.d. qui comm. par u.
$\mathcal{V} = (v, v^\perp)$ la " " " " v.

On sait qu'il existe une unique rotat° r tq $v = r(u)$ (cf. Ex. 6.26) ; on note θ sa mesure d'angle.

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\underline{u}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\underline{v}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puis

$$P = \mathrm{Pass}_{u,v} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ u^{\perp} \end{array} \\ \begin{array}{cc} v = r(u) & v^{\perp} = r(u^{\perp}) \end{array} & \end{array} = \mathrm{Mat}_{u}(r)$$

b.o.n.d.

<u>En effet</u> : $u^{\perp}$ est l'unique vecteur de E tq $(u, u^{\perp})$ est une b.o.n.d. et de même $v^{\perp}$ est l'unique vecteur tq $(v, v^{\perp})$ soit une b.o.n.d. Mais comme r est une rotation, $r(u) = v$ entraîne $r(u^{\perp}) = v^{\perp}$.

De plus : $\mathrm{Mat}_{u}(\tau) = P \; \mathrm{Mat}_{v}(\tau) \; P^{-1}$

Donc $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & (\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

<u>Donc</u> : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\tau\circ\sigma) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\tau)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\sigma) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Donc $\tau \circ \sigma$ admet $R_{2\theta}$ pour matrice rep. ds la b.o.n.d. $\mathcal{U}$; donc $\tau\circ\sigma$ est la rotation de mesure d'angle 2θ.

2. <u>Rappel de vocabulaire</u>. Soit G un gpe. Dire qu'une partie S de G engendre G signifie que tout elt de G peut s'écrire comme produit d'elts de S et d'inverses d'elts de S. Mais, l'inverse d'une réflexion est cette réflexion elle même. Donc, mq $O(E)$ est engendré par les réflexions revient à mq : tt élt de $O(E)$ est composée de réflexions.

<u>Rappel</u> : comme $\dim(E) = 2$, on sait que tout élt de $O(E)$ est soit une rotation, soit une réflexion. Il suffit donc de mq <u>toute rotation s'écrit comme composée de réflexions</u>.

Soit ρ une rotation, de mesure d'angle θ.

Soit u un vecteur unitaire quelconque, soit r la rotation de mesure d'angle $\theta/2$ et $v = r(u)$. Par définition, on a mes $\widehat{(u, v)} = \theta/2$. Soit σ la réflexion par rapport à $\mathbb{R}u$ et τ la réflexion par rapport à $\mathbb{R}v$. D'après la 1re question, $\tau \circ \sigma$ est la rotation de mesure d'angle $2 \cdot \theta/2 = \theta$. Autrement dit : $\boxed{\tau \circ \sigma = \rho}$

<u>Exercice 2.7</u>, <u>Chap. VIII</u>.

On considère un e.a. E et $f : E \longrightarrow E$ une application affine.

.) $\mathrm{Fix}(f)$ est soit vide soit un sea de direct° $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.

..) Si $\dim(E) < \infty$, on a :

$\mathrm{Fix}(f)$ est un singleton $\Longleftrightarrow \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = (\vec{0})$.

i) Supposons $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$. Pour "tester" si $\mathrm{Fix}(f)$ est un ssea ou pas on utilise le théo. habituel : on considère $a \in \mathrm{Fix}(f)$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \phi_a\ } & \vec{E} \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Fix}(f) & \longmapsto & \underbrace{\phi_a(\mathrm{Fix}(f))}_{\text{ssev ?}} \end{array}$$

L'énoncé suggère de mq $\phi_a(\mathrm{Fix}(f)) = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.

Soit $x \in E$. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{a f(x)} = \overrightarrow{f(a) f(x)} = \vec{f}(\overrightarrow{ax})}$$

Ainsi $f(x) = x$ ssi $\vec{f}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{ax}$

((si $x \in \mathrm{Fix}(f) \Longrightarrow \phi_a(x) = \overrightarrow{ax} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$

$f(x) = x \Longleftarrow \overrightarrow{ax} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$

Ceci démontre que

$$\phi_a(\mathrm{Fix}(f)) = \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}).$$

Donc $\mathrm{Fix}(f)$ est un sea et sa direction est $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.

2. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supp. que $\mathrm{Fix}(f)$ est un singleton. Alors, d'après la quest° 1, c'est un sea de direction réduite à $\{\vec{0}\}$. Mais, sa direct° est $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$. Donc $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Obs. : comme $d = (\vec{E})$ est finie, on peut appliquer le théo. de rang et l'hypoth. (ii) se traduit donc par $\boxed{\mathrm{Im}(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \vec{E}.}$ ou encore par le fait que $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ est bijective.

Soit $a \in E$, arbitraire :

Pour $\forall x \in E$, on a :

$$f(x) = x \iff \overrightarrow{af(x)} = \overrightarrow{ax}$$

éq. affine

$$\iff \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)f(x)} = \overrightarrow{ax}$$

$$\iff \overrightarrow{af(a)} + \vec{f}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{ax}$$

$$\iff \underbrace{\left(\vec{f} - id_{\vec{E}}\right)}_{\text{est bijective cf. ci-avant}}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{af(a)}.$$

éq. vect.

Comme $\left(\vec{f} - id_{\vec{E}}\right)$ est bijective, il existe un vecteur $\vec{u}$ et un seul tq $\left(\vec{f} - id_{\vec{E}}\right)(\vec{u}) = \overrightarrow{af(a)}$. Autrement dit, l'éq. vect. ci-dessus admet une solution et une seule. Donc l'éq. affine $f(x)=x$, $x \in E$, admet une sol. et une seul aussi : Autrement dit $\mathrm{Fix}(f)$ est un singleton.