Exposé du 23 mars 2021

Pb : comment décrire un sev de $\mathbb{R}^n$.

Rép : 1) à l'aide d'équations ;

2) à l'aide d'une paramétrisation.

Rappel : Si E est un e.v. de dim. finie sur $\mathbb{K}$ et F un sev de E, il y a deux façons de décrire F :

•) F est intersection d'hyperplans vect.

••) en donnant une base de F

La première méthode permet de décrire F par la donnée d'éq. linéaires homogènes et la seconde en donne une description paramétrique.

Description des sev par équations

Observation 1 : On note $a_1, \dots, a_n$ des réels et b un réel. De plus, on pose

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}.$$

Mq, si $H \neq \emptyset$, alors H est un sea et le décrire.

./ On remarque que, si $a_1 = \dots = a_n = 0$ et $b \neq 0$ alors $H = \emptyset$.

../ On remarque que, si $a_1 = \dots = a_n = 0$ et $b = 0$ alors $H = \mathbb{R}^n$.

.../ On suppose maintenant que les a_i ne sont pas tous nuls.

Alors, H est non vide. En effet si j est un entier tq $a_j \neq 0$, alors le point $\left(0, \dots, 0, \frac{b}{a_j}, 0, \dots, 0\right) \in H$. Donc $H \neq \emptyset$.
Pour vérifier que H est un sev, on a utiliser le Théorème 2.7. Soit $\underline{\underline{\Omega \in H}}$, et posons $\boxed{\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)}$, alors :

$$\begin{aligned} \phi_\Omega : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 - \omega_1, \dots, x_n - \omega_n) \end{aligned}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in H \quad \underline{\underline{\text{ssi}}} \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

$$\underline{\underline{\text{ssi}}} \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a_1 \omega_1 + \dots + a_n \omega_n$$

$$\underline{\underline{\text{ssi}}} \quad a_1 (x_1 - \omega_1) + \dots + a_n (x_n - \omega_n) = 0$$

$$\underline{\underline{\text{ssi}}} \quad \phi_\Omega\big((x_1, \dots, x_n)\big) \in \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0\}$.

Mais, on sait que $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel, càd un sev de $\mathbb{R}^n$ de dim. $n-1$.

Or, ce qui précède mq : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) \in H \quad \underline{\text{ssi}} \quad \phi_\Omega((x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{H}$$

càd que : $\boxed{\phi_\Omega(H) = \mathcal{H}.}$

Ainsi $\phi_\Omega(H)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ et plus précisément $\phi_\Omega(H) = \mathcal{H}$. Donc le théo. 2.7 assure que H est un sea et que $\overrightarrow{H} = \mathcal{H}$. Autrement dit : H est un hyperplan affine de directo l'hyperplan vect. $\mathcal{H}$!

<u>Observation 2</u> : Soient maintenant des réels a_{ij} pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et des réels b_i pour $1 \leq i \leq m$.

On s'intéresse à l'ensemble F des solutions du syst. d'éq.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ & (2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

Donc, si l'on note H_i l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n)$ qui vérifient l'éq. (i), on a :

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i .$$

Mq, si $F \neq \phi$, alors F est un sea.

En effet, si $F \neq \phi$, alors il existe un point ω de $\mathbb{R}^n$ qui est ds chaque H_i. Les H_i st donc non vides et, d'après l'obs. 1, ce st dc des sea de E. Par q leur intersect° est un sea de direction le sev $\bigcap_{i=1}^{m} \vec{H_i}$, d'après le Théo. 2.14.

On vient donc de montrer le résultat suivant :

Soient a_{ij} et b_i des réels, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. L'ens. des points $(x_1, \dots, x_n)$ tq

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

est soit vide, soit un sea de direct° l'ensemble des vecteurs tq

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0. \end{cases}$$

<u>Observation 3</u> : Soit F un sea de E. Mq il existe a_{ij}, b_i, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ tq F est l'ens. des sol. du syst

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Comme F est un sea, il est non vide et on $\tilde{c}$ $\Omega \in F$, $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$.

Comme F est un sea, $\phi_\Omega(F)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ (cf. Théo. 2.7). Donc, cf cours d'alg. lin., il existe a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, des réels tq $\phi_\Omega(F)$ soit l'ens. des sol^{ro} du syst.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Mais, si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\phi_\Omega((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1 - \omega_1, \ldots, x_n - \omega_n)$. Donc

$(x_1, \ldots, x_n) \in F$ ssi $\phi_\Omega((x_1, \ldots, x_n)) \in \vec{F} = \phi_\Omega(F)$

ssi $(x_1 - \omega_1, \ldots, x_n - \omega_n)$ est sol. du syst. ci-dessus

ssi $(x_1, \ldots, x_n)$ est sol. du syst.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - \omega_1) + \cdots + a_{1n}(x_n - \omega_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 - \omega_1) + \cdots + a_{mn}(x_n - \omega_n) = 0 \end{cases}$$

si $\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = a_{11} \omega_1 + \cdots + a_{1n} \omega_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = a_{m1} \omega_1 + \cdots + a_{mn} \omega_n \end{cases}$

il reste à poser
$$b_1 = a_{11} \omega_1 + \cdots + a_{1n} \omega_n$$
$$\vdots$$
$$b_m = a_{m1} \omega_1 + \cdots + a_{mn} \omega_n.$$

pour conclure que F est l'ens. des solutions du syst.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Bilan: Tout sea est l'ensemble des solution d'un syst. d'éq. linéaires.

Vocabulaire : on dit que le syst. ci-dessus est une description de F par des équations.

Rmq: cette description de F est utile pour vérifier si un point de $\mathbb{R}^n$ est ou pas dans F.

Cette description de F par des équations donne un test d'appartenance à F facile à utiliser : un pt est de F ssi ses coordonnées vérifient les m éq. du syst.

$\boxed{\text{Description des sea par paramètres}}$

<u>Obs. 1</u> On considère des réels v_{ij} et w_i avec $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, et l'ensemble F des points de la forme

(*) $$\boxed{\left(\lambda_1 v_{11} + \dots + \lambda_m v_{1m} + w_1, \dots\dots, \lambda_1 v_{n1} + \dots + \lambda_m v_{nm} + w_n\right)}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ qui parcourent $\mathbb{R}$.

Mq F est un sea de $\mathbb{R}^n$ et préciser sa direction.

(*) peut être vue comme suit :

$$\underbrace{\lambda_1 \overset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}} + \dots\dots + \lambda_m \overset{\vec{v}_m}{\begin{pmatrix} v_{1m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{pmatrix}}}_{\text{vecteur de translation}} + \underbrace{\overset{\Omega}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}}$$

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{v}_1 = (v_{11}, \dots\dots, v_{n1})$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_m = (v_{1m}, \dots, v_{nm})$$

et le point $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Alors l'ensemble considéré est l'ensemble des points obtenus en translatant le point Ω par le vecteur

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots\dots + \lambda_m \vec{v}_m$$

C'est donc un sea de direction $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$.

<u>Observation 2</u> Si on se donne un sous-espace affine contenant le point $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et de direction $\vec{F}$ tq $\vec{F} = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de vecteurs, on obtient une description de F de la forme suivante :

F est l'ensemble des translatés de Ω par un vecteur de $\vec{F}$ càd par une comb. lin. de la forme $\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_m \vec{v_m}$.

Ainsi, si l'on pose $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

et $\vec{v_1} = (v_{11}, \dots, v_{n1})$

$\vdots$

$\vec{v_m} = (v_{1m}, \dots, v_{nm})$

on obtient la $\boxed{\text{description paramétrique}}$ suivante de F : F est l'ensemble des points

$$(\lambda_1 v_{11} + \dots + \lambda_m v_{1m} + \omega_1, \dots, \lambda_1 v_{n1} + \dots + \lambda_m v_{nm} + \omega_n)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ parcourent $\mathbb{R}$.

<u>Rmq :</u> la <u>description paramétrique</u> d'un sea est particulièrement adaptée à la $\boxed{\text{construction}}$ de points lui appartenant.

<u>Exemple d'application</u> : On se place ds l'espace affine $\mathbb{R}^3$ et on considère le sous-espace affine F contenant le point $\Omega = (1,1,1)$ et dont la direction est le sev engendré par $(1,2,0)$ et $(0,-1,3)$. Donner une description par équations et une description paramétrique de F. Les points $(0,0,0)$ et $(1,0,4)$ sont-ils dans ce s-esp. ?

<u>Exercice VII.6.24</u>. E est un e.v. et il est donc muni naturellement d'une structure d'e.a. (cf. cours). St V une partie de E.

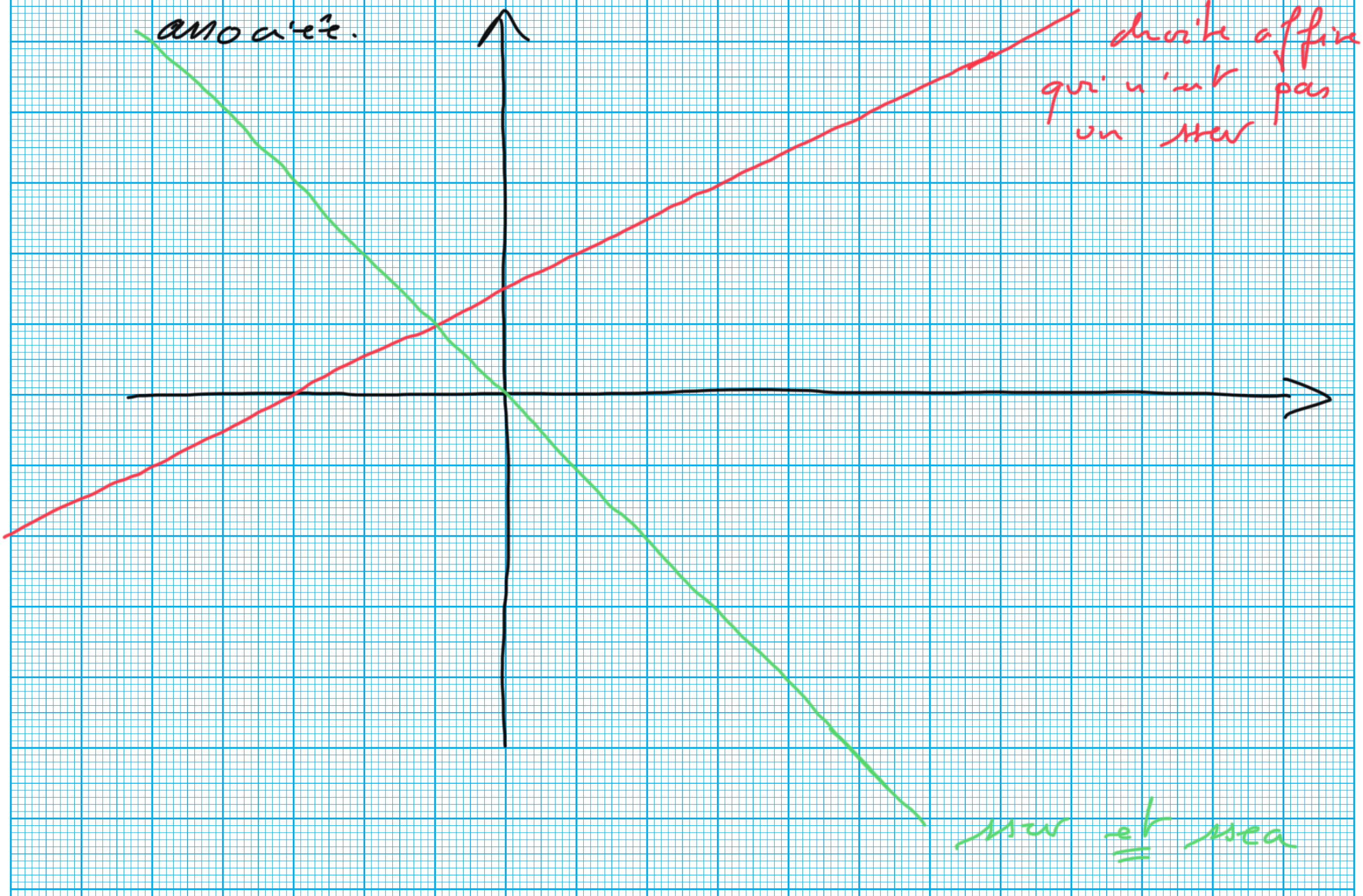
(ii) $\Rightarrow$ (i) On considère l'application

$$\phi_0 : E \longrightarrow \vec{E} = E$$
$$x \longmapsto x$$

(cf. Ex. 1.5 du cours). En fait $\phi_0 = id_E$. Comme V est un sea, le théo. 2.7 assure que $\phi_0(V)$ est un sev. Mais $\phi_0(V) = V$. Donc V est un sev.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que V est un ssev.
Comme V est un ssev, il contient 0. On peut donc appliquer le Théo. 2.7 avec ϕ_0. Et, comme $\phi_0(V) = V$ le Théo. 2.7 dit que V est un ssea.

<u>Illustration</u> : On se place ds l'e.v. $\mathbb{R}^2$, et on le munit de sa structure d'e.a. associée.



Dans cas cas particulier, l'ex 6.24 dit que, une droite affine de $\mathbb{R}^2$ est un ssev ssi elle contient 0.

Exercice 6.25 Si $p, q \in \mathbb{N}^*$. On considère les e.a. $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Pb : décrire les applications affines de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$. Mq f est une application affine $\boxed{\text{ssi}}$ il existe $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

tq

$$f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$(x_1, \dots, x_q) \longmapsto (\underline{a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q + b_1}, \dots, \underline{a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q + b_p}).$$

($\Leftarrow$) On supp. donné une matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et un point $(b_1, \dots, b_q)$ comme ci-dessus et on considère l'application f associée comme ci-dessus. Le but est de mq f est affine. Pour cela, on va utiliser le Théorème 3.2.

$$\begin{tikzcd}
(x_0, \dots, x_q) & \mathbb{R}^q \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \arrow[d, "\phi_{f(0)}"] & (a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q + b_1, \dots) \\
(x_0, \dots, x_q) \arrow[u] & \mathbb{R}^q \arrow[u, "\phi_0^{-1}"] \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^p & (a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q, \dots)
\end{tikzcd}$$

P

e.a

e.v.

$f(0)$ P

et $\boxed{f(0) = (b_1, \dots, b_p)}$.

Ce qui précède mq

$$\phi_{f(0)} \circ f \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad (*)$$

$$(x_1, \dots, x_q) \longmapsto (a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q, \dots, a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q)$$

or cette application est linéaire. Donc f est affine et que $\vec{f}$ est l'appl. ci-dessus $(*)$

($\Longrightarrow$) Idée de démonstration.

On sait que toute application linéaire de $\mathbb{R}^q$ ds $\mathbb{R}^p$ est de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_q) & \longmapsto & \boxed{(a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q, \dots, a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q)} \end{array}$$

Puisque f est affine, alors $\vec{f}$ est linéaire et, pour tout x ds $\mathbb{R}^q$:

$$\overrightarrow{f(0)f(x)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{Ox}\right)$$

càd que $f(x)$ est le translaté par $\vec{f}(\underbrace{\overrightarrow{Ox}}_{x})$ de $f(0)$.

Si on pose $f(0) = (b_1, \dots, b_p)$, on obtient le resultat !