Exposé du 25/03/21

Correct° de l'ex. d'appl. du 23/03/21

$E = \mathbb{R}^3$ e.a. standard, F sea contenant $\Omega = (1,1,1)$ et tq $\vec{F} = \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,-1,3)\big)$

* Description paramétrique : on sait que

$$F = \left\{ T_{\vec{u}}(\Omega),\ \text{où } \vec{u} \in \vec{F} \right\}$$

$$= \left\{ T_{\vec{u}}(\Omega),\ \text{où } \lambda(1,2,0) + \mu(0,-1,3),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (1+\lambda,\ 1+2\lambda-\mu,\ 1+3\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}$$

puisque, pour $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \lambda(1,2,0)+\mu(0,-1,3)$

on a : $\overrightarrow{\Omega T_{\vec{u}}(\Omega)} = \lambda(1,2,0) + \mu(0,-1,3)$.

Posons $T_{\vec{u}}(\Omega) = (x,y,z)$, alors

$$(x-1,\ y-1,\ z-1) = \lambda(1,2,0) + \mu(0,-1,3)$$

càd $(x,y,z) = (1+\lambda,\ 1+2\lambda-\mu,\ 1+3\mu)$

* Pour obtenir la description par équation(s) on pourrait procéder ainsi :

·) commencer par déterminer la desc. par éq. du plan vect $\vec{F}$

Rappel : pour cela on peut compléter la famille $(\underbrace{(1,2,0)}_{\vec{u}_1}, \underbrace{(0,-1,3)}_{\vec{u}_2})$ en une base de $\vec{E} = \mathbb{R}^3$, notée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, calculer sa base duale $(\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*, \vec{u}_3^*)$. L'éq. de $\vec{F}$ est alors donnée par $\vec{u}_3^*$.

··) en déduire celle de F en exploitant le fait que $\Omega \in F$.

On va procéder de façon plus directe.

Obs. : il est clair que $((1,2,0),(0,-1,3))$ est libre et donc que $\dim(F) = \dim(\vec{F}) = 2$.

On en déduit alors que F est un plan affine et puisqu'il peut être décrit par une seule éq. . Ainsi il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tq

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}.$$

Pb : déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

On a alors
$$\vec{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$$

Mais $(1,2,0) \in \vec{F}$, donc $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$
et $(0,-1,3) \in \vec{F}$, donc
Par exemple, on peut choisir $\alpha = +6$
$\beta = -3$, $\gamma = -1$. Ainsi :

$$\vec{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 6x - 3y - z = 0\}.$$

De plus, comme $\Omega = (1,1,1) \in F$, on doit avoir $6 - 3 - 1 + \delta = 0$ càd $\delta = -2$.

<u>Concl.</u> : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 6x - 3y - z - 2 = 0\}$

<u>Q1</u> : $(0,0,0) \overset{?}{\in} F$
on a $6 \times 0 - 3 \times 0 - 0 - 2 = -2 \neq 0$
donc $(0,0,0) \notin F$

<u>Q2</u> : $(1,0,4) \overset{?}{\in} F$
on a $6 \times 1 - 3 \times 0 - 4 - 2 = 0$
donc $(1,0,4) \in F$.

Ce qui précède met en évidence que la descript° par éq. fournit un <u>test</u> pour savoir si un point est ou n'est pas ds F.

La description paramétrique, elle, fournit une manière très simple de calculer des points de F. Par ex., dans la description param. si l'on prend $\lambda = -1$ et $\mu = 4$, on trouve que $(0,-5,13) \in F$.

<u>Ex. VII.6.22</u> $\mathbb{R}^3$, e.a. standard et

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-4x-2y+z-7,\ x-y-z-1,\ -3x-6y-9)$$

1. On sait (cf. T.D. du 23/03/21) qu'une telle appl. est affine et que son appl. lin. associée est

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-4x-2y+z,\ x-y-z,\ -3x-6y)$$

càd que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$
$= 9 \neq 0.$

Donc f est bijective. Il s'ensuit que f est bijective (cf. : cours).

2. Calcul des v.p. et sous-esp. propres de f.

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 1 \\ -3-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= +(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= +(3+\lambda)\left[-\lambda(2+\lambda)+3\right] = -(\lambda+3)(\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-1)$$

Donc $\chi_f(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+3)^2$.

D'où $\operatorname{Spec}(f) = \{-3, 1\}$.

- $\operatorname{Ker}(f - id_E)$:

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f - id_E)$

ssi $\begin{cases} -4x - 2y + z = x \\ x - y - z = y \\ -3x - 6y = z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ +3x + 6y + z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 6y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 12y + 4z = 0 \\ \cancel{12y + 4z = 0} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f - id_E) = \left\{ \left(\frac{1}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left\{ (1, -1, 3) \right\}$.

- $\mathrm{Ker}(f + 3 id_E)$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + 3 id_E)$

ssi $\begin{cases} -4x - 2y + z = -3x \\ x - y - z = -3y \\ -3x - 6y = -3z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \cancel{x + 2y - z = 0} \\ \cancel{-3x - 6y + 3z = 0} \end{cases}$

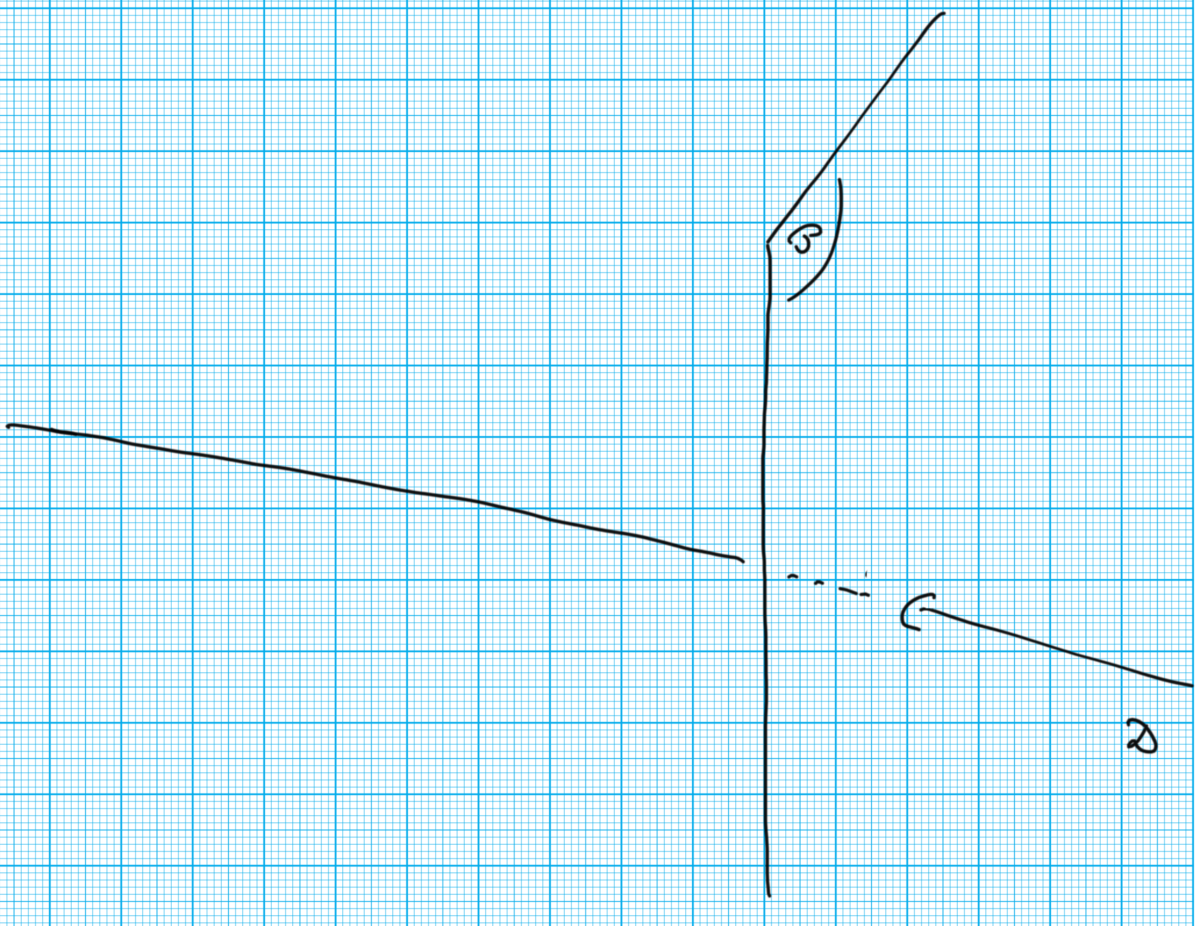
Donc : $\mathrm{Ker}(f + 3 id_E) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 1, 2) \right)$.

Ainsi f est diagonalisable car les s.esp. propres sont tous les deux de dim. égale à la mult. de la v.p. qui leur correspond.

Comme f admet deux v.p. distinctes, dont l'une vaut 1, f est une affinité vectorielle.

Plus précisément, f est l'affinité par rapport à $\mathcal{D} = \ker(f - id_E)$, parall. à $\mathcal{P} = \ker(f + 3 id_E)$ et de rapport -3.



c.à.d : $f : \underset{\mathcal{D} \oplus \mathcal{P}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = x_{\mathcal{D}} + x_{\mathcal{P}} \longmapsto x_{\mathcal{D}} - 3x_{\mathcal{P}}$$

3. Calcul de $\mathrm{Fix}(f)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$(x,y,z) \in \mathrm{Fix}(f)$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} -4x - 2y + z - 7 = x \\ x - y - z - 1 = y \\ -3x - 6y - 9 = z \end{cases}$$

ssi ....

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3y + z = -3 \end{cases}$$

Ainsi : $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$; plus précisément, $\mathrm{Fix}(f)$ contient $(-1,-1,0)$ et sa direction est $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_E)$ (cf. cours).

4. Considérons la droite affine $\Delta = \mathrm{Fix}(f)$ c'est donc la droite qui contient $(-1,-1,0)$ et de direction $\vec{\Delta} = \mathcal{D} = \mathrm{Vect}((1,-1,3)) = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_E)$. Considérons par ailleurs le plan vectoriel $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(\vec{f} + 3\, id_E)$. Enfin, soit g

l'affinité affine par rapport à Δ, parall. à $\mathcal{P}$ et de rapport -3. Par définition, on a $\vec{g}$ est l'affinité vect. par rapport à $\vec{\Delta} = \mathcal{D}$ parall. à $\vec{\mathcal{P}}$ et de rapport -3. Donc $\vec{f} = \vec{g}$.

Par ailleurs, par construction de g, $g((-1,-1,0)) = (-1,-1,0)$ car $(-1,-1,0) \in \Delta$. Comme $(-1,-1,0)$ est aussi un point fixe pour f, on a :

$$f((-1,-1,0)) = g((-1,-1,0)).$$

<u>Bilan</u> : $\vec{f} = \vec{g}$ et $f((-1,-1,0)) = g((-1,-1,0))$

donc $f = g$. En concl. f est l'aff. affine par rapport à Δ, parall. à $\mathcal{P}$ et de rapport -3.

<u>Exercice VII. 6. 23</u> : $\mathbb{R}^3$ e.a. standard et on c̃ les droites D et D' données par les rep. paramétriques suivantes :

$$D = \{(3+t,\ 9-4t,\ t),\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$D' = \{(2+2u,\ 4+u,\ u),\ u \in \mathbb{R}\}.$$

1. On applique le théorème d'incidence. Pour cela, on a besoin de savoir si $D \cap D'$ est vide ou pas.

$D \cap D' \neq \emptyset$ <u>ssi</u> il existe $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ /

$$\begin{cases} 3+t = 2+2u \\ 9-4t = 4+u \\ t = u \end{cases}$$

<u>ssi</u> il existe $t, u \in \mathbb{R}$ tq

$$(*) \quad \begin{cases} 2u - t = 1 \\ u + 4t = 5 \\ u - t = 0 \end{cases}$$

<u>ssi</u> il existe $t, u \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u - t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Or, ce dernier système admet une solution (et une seule).

Le théorème d'incidence assure donc que $P = \mathrm{Aff}(D \cup D')$ est de dimension $\dim(\vec{D} + \vec{D'})$.

On a : $\vec{D} = \mathrm{Vect}\left(\left(1,-4,1\right)\right)$

et : $\vec{D'} = \mathrm{Vect}\left(\left(2,1,1\right)\right)$

Donc $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont des sev supplémentaires

Pcq $\vec{D} + \vec{D'} = \vec{D} \oplus \vec{D'}$ et donc

$\dim(\vec{D} + \vec{D'}) = \dim(\vec{D}) + \dim(\vec{D'}) = 2.$

<u>Donc :</u> P est un plan affine.

Plus précisément : $D \subseteq P$ et $\vec{D} \subseteq \vec{P}$

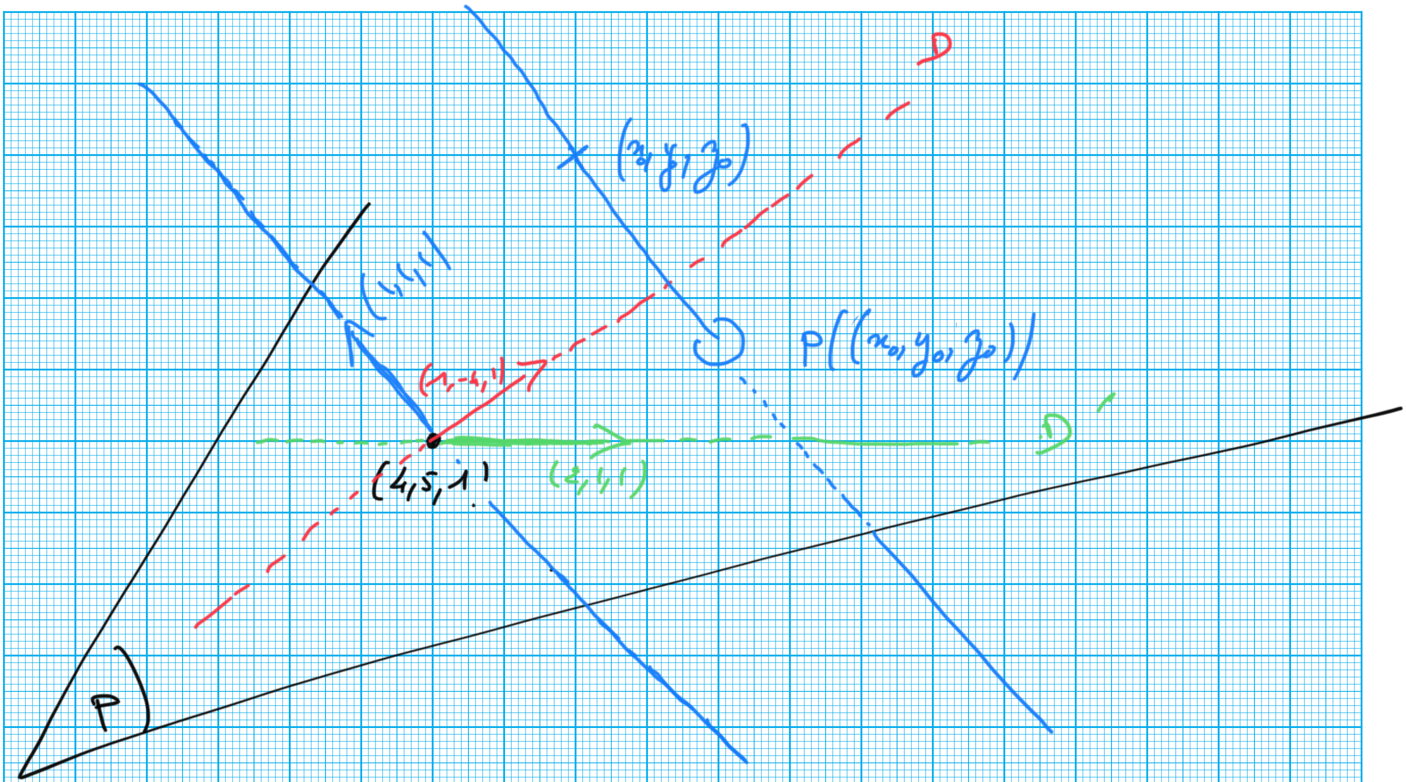
$D' \subseteq P$ $\quad \vec{D'} \subseteq \vec{P}$

donc $\{(4,5,1)\} = D \cap D' \subseteq P$

$(1,-4,1) \in \vec{P}$

$(2,1,1) \in \vec{P}$

Ainsi P est le plan affine contenant le point $(4,5,1)$ et dont la direction est $\vec{P} = \mathrm{Vect}\left((1,-4,1),(2,1,1)\right)$



Il est alors facile de mq :

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -5x + y + 9z + 6 = 0\}$$

et donc $\vec{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -5x + y + 9z = 0\}$.

2. Étant donné un point $M = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$, par déf., la projection $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur P, parall. à $\mathbb{R}(1,1,1)$ est l'unique point d'intersection entre la droite passant par M et dirigée par le vecteur $(1,1,1)$ et le plan P.

Fixons un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. La droite affine passant par ce point et de direction $\mathbb{R}(1,1,1)$ admet pour rep. paramétrique :

$$(*_1) \quad \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer l'intersection de cette droite avec P, on doit donc déterminer l'unique valeur de t pour laquelle

$$-5(x_0+t) + (y_0+t) + 9(z_0+t) + 6 = 0$$

càd pour laquelle

$$\boxed{5t = 5x_0 - y_0 - 9z_0 - 6} \quad (*)$$

On a donc :

$$p((x_0, y_0, z_0)) = \Big(x_0 + \frac{1}{5}(5x_0 - y_0 - 9z_0 - 6), y_0 + \frac{1}{5}(5x_0 - y_0 - 9z_0 - 6), z_0 + \frac{1}{5}(5x_0 - y_0 - 9z_0 - 6)\Big).$$

<u>Bilan</u> :

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{5}\left(10x - y - 9z - 6,\ 5x + 4y - 9z - 6,\ 5x - y - 4z - 6\right)$$