Exposé du 26 mars 2021

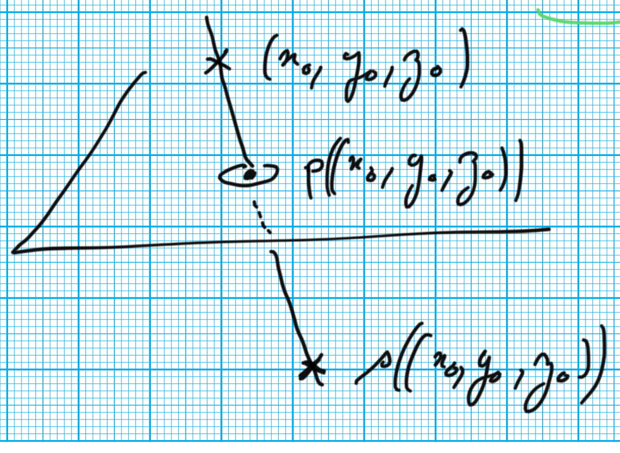
Exercice VII.6.23 (fin)

On a un plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -5x + y + 9z + 6 = 0\}$ on a calculé l'expression analytique de la proj. affine sur P, parall. à la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$.

Pb : expression analytique de la sym. affine par rapport à P et $/\!/$ à $\mathbb{R}(1,1,1)$.

Si l'on note s cette symétrie, elle est caractérisée de la façon suivante, pour tout (x_0, y_0, z_0) :

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)\, s((x_0,y_0,z_0))} = 2\, \underbrace{\overrightarrow{(x_0,y_0,z_0)\, p((x_0,y_0,z_0))}}_{\text{connu}}$$



Ainsi, si l'on note (x_1, y_1, z_1) l'image de (x_0, y_0, z_0) par s, on a :

cf. exp. analyt. de $p((x_0, y_0, z_0))$

$$(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0) = 2\left(\ \cdot\ - x_0,\ \ \cdot\ - y_0,\ \ \cdot\ - z_0\right)$$

première	deuxième	troisième
coord. de	"	"
$p((x_0, y_0, z_0))$	"	"

Finalement, on trouve que l'expression analytique de s est la suivante :

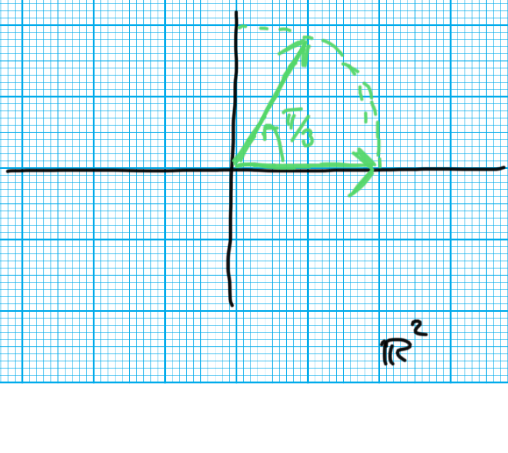
$$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{5}\left(15x - 2y - 18z - 12,\ 10x + 3y - 18z - 12,\ 10x - 2y - 13z - 12\right)$$

Exercice VI.6.29 : Angles orientés de vecteurs

On se place ds le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$.

- Si u et v sont deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, on appelle angle orienté de vecteur de u et v, noté $\widehat{(u,v)}$, l'unique $\boxed{\text{rotation}}$ qui envoie u sur v.
- Comme $\mathbb{R}^2$ est orienté, cette rotation admet une mesure d'angle, unique à 2π près. Cette mesure d'angle est appelée la mesure d'angle orienté de vecteurs de u et v et est notée mes $\widehat{(u,v)}$.
- Attention : parfois on définit la mesure d'angle orienté de vecteurs comme un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; ds ce cas mes $\widehat{(u,v)}$ est unique et c'est la classe d'un nombre réel modulo $2\pi\mathbb{Z}$.



rotation de mesure d'angle $\pi/3$; c'est aussi la rotation de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}+2\pi$ ou encore $\pi/3 - 2\pi$.

$$\cdots \quad \tfrac{\pi}{3}-4\pi \quad \tfrac{\pi}{3}-2\pi \quad \tfrac{\pi}{3} \quad \tfrac{\pi}{3}+2\pi \quad \tfrac{\pi}{3}+4\pi \quad \tfrac{\pi}{3}+6\pi \cdots \qquad \mathbb{R}$$

classe d'équiv. modulo $2\pi\mathbb{Z}$

L'ensemble des classes d'éq. est noté $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
une classe d'équiv. étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué de réels séparés par un multiple de 2π.

- Complément utile.

ens. des rotat° — pas bien définie

$$SO(E) \dashrightarrow \mathbb{R}$$

$$SO(E) \longleftarrow \mathbb{R}$$

la rotation $r_\theta \longleftarrow \theta$

$$r_{\pi/3} = r_{\pi/3+2\pi} \longleftarrow \begin{matrix} \pi/3 \\ \neq \\ \pi/3+2\pi \end{matrix}$$

bij.

$$SO(E) \rightleftarrows \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$r \longmapsto$ mesure d'angle de r

$r \longleftarrow$ classe modulo $2\pi\mathbb{Z}$

De plus, cette dernière application est un morphisme de gpes. Cela signifie que, si r et r' sont des rotations dont les réels θ et θ' sont des mesures d'angles, alors $r \circ r'$ est une rotation dont $\theta + \theta'$ est une mesure d'angle.

Attent° : si r est une rotat° de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et r' " " " d'angle $\theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{r = r' \text{ ssi } \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}.$$

1. Premiers résultats sur les mesures d'angles.

1.1. On veut démontrer que

$$u = v \text{ ssi } \operatorname{mes}\left(\widehat{(u,v)}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$

Par définition, $\widehat{(u,v)}$ est l'unique rotation r tq $v = r(u)$.

Supposons que $u = v$.
Alors l'unique rotation qui envoie u sur v est l'identité. Or l'identité admet 0 pour mesure d'angle. Donc :

$$\operatorname{mes} \widehat{(u,v)} \equiv \operatorname{mes}(id) \equiv 0 \; [2\pi].$$

Réciproquement : supposons que $\operatorname{mes} \widehat{(u,v)} \equiv 0 \; [2\pi]$. Cela signifie que 0 (ou n'importe quel réel de la forme $0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) est une mesure d'angle de l'unique rotation qui envoie u sur v. Puisq cette rotation est id. Donc $v = id(u)$ c-à-d $v = u$.

1.2. Supposons que : $\operatorname{mes} \widehat{(u,v)} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$
Cela signifie que la rotation $\widehat{(u,v)}$ admet pour mesure d'angle tout réel de la forme $\pi + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit donc que sa matrice dans la b.c. est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\widehat{(u,v)} = -id_{\mathbb{R}^2}$. On a donc

$v = -id_{\mathbb{R}^2}(u) = -u$.

Réciproque : supposons que $v = -u$.

$-id_{\mathbb{R}^2}$ est une rotation et elle envoie u sur $-u = v$. Donc

$$\widehat{(u,v)} = -id_{\mathbb{R}^2}.$$

Comme $-id_{\mathbb{R}^2}$ admet pour mesure d'angle π (ou tout réel congru à π modulo 2π), on a donc

$$\operatorname{mes}\widehat{(u,v)} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

1.3 Supposons que $\operatorname{mes}\widehat{(u,v)} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Alors la matrice de la rotation r qui envoie u sur v, dans toute b.o.n.d. est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obs. : soit $w = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a donc $r((a,b)) = (-b, a)$ et réciproq.

$(r(w), w) = 0$. On a ainsi montré que l'image d'un vecteur par r est orthogonale à ce vecteur. En particulier, $v = r(u)$ est orthog. à u.

<u>Note</u> : Lorsque $\widehat{(u,v)} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, le même argument s'applique, mais la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Réciproquement</u> : on suppose que u et v sont orthogonaux.

<u>1er cas</u> (u, v) est une b.o.n.d. Il est clair alors que l'endo. de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice ds la base (u,v) est

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une rotation car la matrice ci-dessus est orthogonale et de déterminant 1. De plus, cet endo. envoie u sur v (cf. 1ère colonne). Bilan : l'endo. en question est une rotation de mesure d'angle $\pi/2$

Donc $\operatorname{mes} \widehat{(u,v)} = \pi/2$.

2ᵉ cas : (u,v) est une b.o.n. indirecte. Alors, $(u,-v)$ est une b.o.n. directe et on peut faire le m̂ raisonnement qu'au 1er cas avec $(u,-v)$, en considérant l'endo. de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice ds la base $(u,-v)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Relation de Chasles pour les angles.

$\widehat{(u,v)}$ est la rotation qui envoie u sur v.
$\widehat{(v,w)}$ " " " " " v sur w.

$\widehat{(v,w)} \circ \widehat{(u,v)}$ est une rotation (comme comp. de deux rotations) de plus cette composée envoie u sur w. Ainsi

Donc : $$\boxed{\widehat{(u,w)} = \widehat{(v,w)} \circ \widehat{(u,v)}}$$

Mais, si θ est mesure d'angle d'une rotat° r et θ' mesure d'angle d'une rotat° r', alors $\theta+\theta'$ est mesure d'angle de $r' \circ r$. Donc :

$$\text{mes}\,\widehat{(u,w)} \equiv \text{mes}\,\widehat{(u,v)} + \text{mes}\,\widehat{(v,w)}\ [2\pi]$$

1.5 $\quad \text{mes}\,\widehat{(u,v)} = -\text{mes}\,\widehat{(v,u)}$

<u>1ère idée</u> : relation de Chasles avec $w = u$ (et quest° 1.1).

<u>2e idée</u> :

$\widehat{(u,v)}$: rot. qui envoie u sur v.

$\widehat{(v,u)}$: " " " v sur u

$\quad \|$

$\left(\widehat{(u,v)}\right)^{-1}$

2. Si $g \in SO(E)$, alors g conserve les mesures d'angles orientés de vecteurs. Autrement dit : $\forall u, v$ vect. unitaires

$$\mathrm{mes}\,\widehat{(u,v)} = \mathrm{mes}\,\widehat{\big(g(u), g(v)\big)}$$

3. Soit $f \in SO(E)$ (càd f est une rotation) et $s \in O^-(E)$ (càd s est une réflexion), alors

$$f^{-1} \circ s = s \circ f.$$

Comme s est une réflexion, il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ relat. à laquelle

$$S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, quitte à changer le second vecteur de $\mathcal{B}$ en son opp, on peut m̂ choisir $\mathcal{B}$ <u>directe</u>.

De plus, comme $\mathcal{B}$ est une b.o.n.d., $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$ où θ est la mesure d'angle de f. Et on a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = R_{-\theta}$.

Le calcul mq $R_{-\theta} . S = S . R_\theta$.

donc $\boxed{f^{-1} \circ s = s \circ f.}$ càd $f^{-1} = s \circ f \circ s^{-1}$
$= s \circ f \circ s.$

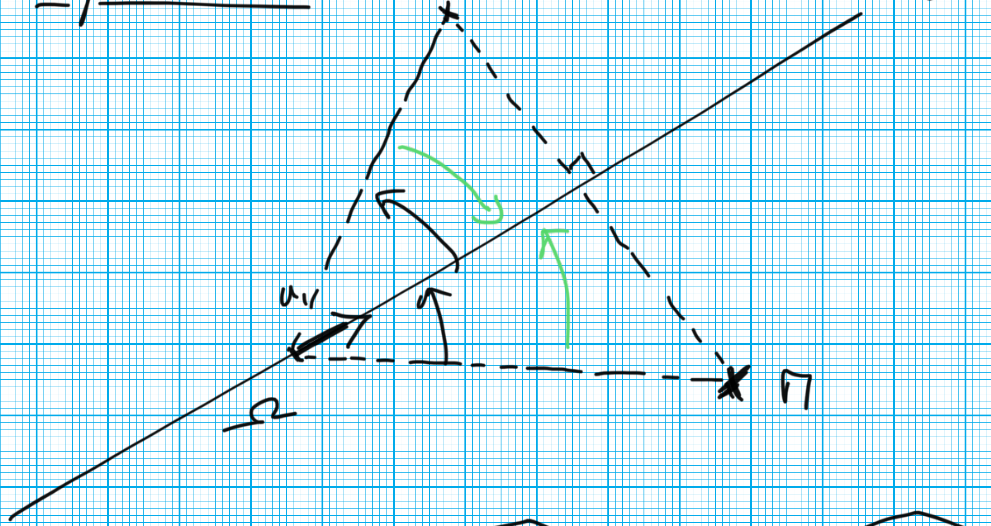
Applicat° soient u et v des vecteurs unitaires et st $f = \widehat{(u,v)}$. On veut mq $\mathrm{mes}\,\widehat{(s(u), s(v))} = -\,\mathrm{mes}\,\widehat{(u,v)}$

On a : $f^{-1}(s(u)) = s \circ \underbrace{f \circ s}_{\text{est une rotat°}} (s(u)) = s \circ f(u)$
$= s(v)$

Ainsi f^{-1} est la rotat° qui envoie $s(u)$ sur $s(v)$. Càd $f^{-1} = \widehat{(s(u), s(v))}$

On a donc $\mathrm{mes}\,\widehat{(s(u), s(v))} = \mathrm{mes}\,\widehat{(-u, v)}$.

Capes 2019 :



Pb : mq $\text{mes}\left(\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{u}_1}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{\Omega M'}}\right)$

càd mq $\text{mes}\left(\widehat{\frac{\vec{\Omega M}}{\|\vec{\Omega M}\|}, \vec{u}_1}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\vec{u}_1, \frac{\vec{\Omega M'}}{\|\vec{\Omega M'}\|}}\right)$.

Comme s est une réflexion,

$$\text{mes}\left(\widehat{s\left(\frac{\vec{\Omega M}}{\|\vec{\Omega M}\|}\right), \underbrace{s(\vec{u}_1)}_{=\vec{u}_1}}\right) = -\,\text{mes}\left(\widehat{\frac{\vec{\Omega M}}{\|\vec{\Omega M'}\|}, \vec{u}_1}\right)$$

(cf. quest. 3 de l'ex.).

Donc $\text{mes}\left(\vec{\Omega M'}, \vec{u}_1\right) = -\,\text{mes}\left(\vec{\Omega M}, \vec{u}_1\right) \overset{(1.4)}{=} \text{mes}\left(\vec{u}_1, \vec{\Omega M}\right)$.

Exercice VI.6.35 : Similitudes vectorielles.

On se place ds un e.v.e. E. On appelle <u>similitude</u> tout endo. s de E tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $g \in O(E)$ vérifiant
$$s = \lambda g.$$

<u>Commentaires</u> : ainsi, si s est une similitude, on a (avec les not. ci-dessus)

$$s \underset{\text{par déf.}}{=} \lambda g = \left(\lambda \, id_E\right) \circ g$$

Donc : une similitude est la comp. d'une homothétie vectoriel de rapport positif <u>strictement</u> et d'une isométrie.

<u>Obs.</u> Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ et $g \in O(E)$, on a :

$$\lambda g = \underbrace{(-\lambda)}_{\in \, \mathbb{R}_+^*} \underbrace{(-g)}_{\in \, O(E)}$$

Donc, en fait, un endo. est une similitude ssi c'est la comp. d'une homothétie de rapport non nul et d'une isométrie.

__Une propriété des similitudes :__

Soit s une similitude. Si u et v st deux vecteurs orthogonaux, alors $s(u)$ et $s(v)$ st deux vecteurs orthogonaux.

En effet, par déf., il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $g \in O(E)$ tq $s = \lambda g$.

$$\text{Alors} \quad (s(u), s(v)) = (\lambda g(u), \lambda g(v))$$
$$= \lambda^2 (g(u), g(v))$$
$$= \lambda^2 (u, v)$$
$$= 0.$$

$g \in O(E)$

__Ainsi__ : les similitudes conservent l'orthogonalité.

<u>Résultat admis</u> : si s est un endo. non nul et si s préserve l'orthog. alors s est une similitude.