Groupe des homothéties-translations.

L'énoncé essentiel pour résoudre cet exercice est la Proposition 3.7. Elle assure que, si f est une application affine tq $\vec{f} = k\,id$ pour un certain scalaire k, alors f est une translation lorsque k vaut 1 et une homothétie sinon. Il s'ensuit que l'ensemble des homothéties-translations est un groupe puisque, si f et g sont des applications affines, $f \circ g$ l'est aussi et $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$.

<u>Attention</u> : il faut exclure l'homothétie de rapport nul car on veut un groupe pour la loi de composition des applications et que les éléments doivent donc être inversibles pour la composition.

1. On a $\vec{t} = \vec{s} = id$. Donc $\overrightarrow{t \circ s} = \vec{t} \circ \vec{s} = id$. Donc (cf. Prop. 3.7) $t \circ s$ est une translation. On vérifie facilement que si $t = T_{\vec{u}}$, $s = T_{\vec{v}}$, alors $t \circ s = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.
2. Par hypothèse, $\vec{h} = k\,id_{\vec{E}}$ avec $k \neq 1$. Donc $\overrightarrow{h \circ t} = \vec{h} \circ id = k\,id_{\vec{E}}$. Comme $k \neq 1$, la Prop. 3.7 3) assure que h est une homothétie dont le centre est l'unique point fixe et dont le rapport est k.
3. Idem.

4. On a $\overrightarrow{h \circ h'} = \vec{h} \circ \vec{h'} = k\, id_{\vec{E}} \circ k'\, id_{\vec{E}} = kk'\, id_{\vec{E}}$.

1er Cas : $kk' = 1$. Alors la Prop. 3.7 assure que $h \circ h'$ est une translation. On peut calculer son vecteur : notant t cette translation, son vecteur est égal à $\overrightarrow{O't(O')}$. Mais $t(O') = h \circ h'(O') = h(O')$. Donc $t(O')$ est l'unique point tq $\overrightarrow{Ot(O')} = k\overrightarrow{OO'}$.

On a alors
$$\begin{aligned}\overrightarrow{O't(O')} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Ot(O')}\\ &= \overrightarrow{O'O} + k\overrightarrow{OO'}\\ &= (k-1)\overrightarrow{OO'}\end{aligned}$$

t est donc la translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{OO'}$.

2e Cas : $kk' \neq 1$. Alors, la proposition 3.7 assure que $h \circ h'$ est une homothétie ~~[illegible]~~ dont le centre est l'unique point fixe et le rapport kk'. On peut en fait calculer ce point fixe.

Pour tout point x de E, on a : $\overrightarrow{O'h'(x)} = k'\overrightarrow{O'x}$ et $\overrightarrow{Oh \circ h'(x)} = \overrightarrow{Oh(h'(x))} = k\overrightarrow{Oh'(x)}$.

Donc
$$\begin{aligned}\overrightarrow{Oh \circ h'(x)} = k\overrightarrow{Oh'(x)} &= k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'h'(x)}\\ &= k\overrightarrow{OO'} + kk'\overrightarrow{O'x}.\end{aligned}$$

Ainsi, un point x de E est fixe pour $h \circ h'$

ssi $\overrightarrow{Ox} = k\overrightarrow{OO'} + kk'\overrightarrow{O'x}$

ssi $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'x} = k\overrightarrow{OO'} + kk'\overrightarrow{O'x}$

ssi $(1-kk')\overrightarrow{O'x} = (k-1)\overrightarrow{OO'}$

ssi $\overrightarrow{O'x} = \dfrac{k-1}{1-kk'}\overrightarrow{OO'}$

Ceci détermine x.