Observation : cet exercice est l'analogue affine de l'exercice 6.27 du chap. VI

1. Composée de réflexions.

1.1. Soit $\vec{u} \in \vec{E}$ tq $\vec{D} = \vec{D'} = \mathbb{R}\vec{u}$.

On a que $\vec{s} = \vec{s'}$ (et ce sont les réflexions par rapp. à $\vec{D}$). Il s'ensuit que :

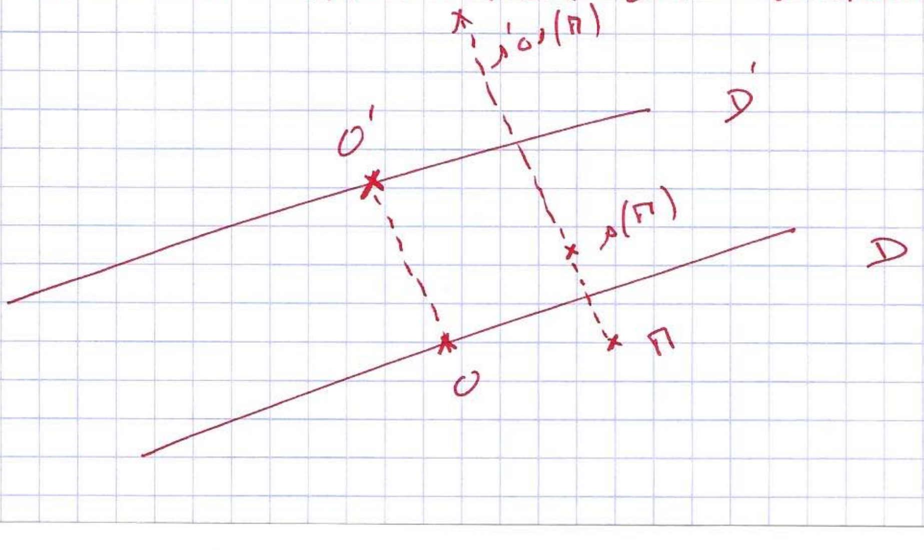
$$\overrightarrow{s' \circ s} = \vec{s'} \circ \vec{s} = \vec{s}^2 = id.$$

Ceci montre que $s' \circ s$ est une translation. Précisons laquelle. Si O est un point de D et si O' est son proj. $\perp$ sur D', alors $s' \circ s(O)$ est caractérisé par :

$$\overrightarrow{O\, s' \circ s(O)} = \overrightarrow{O\, s'(O)} = 2\overrightarrow{OO'}$$

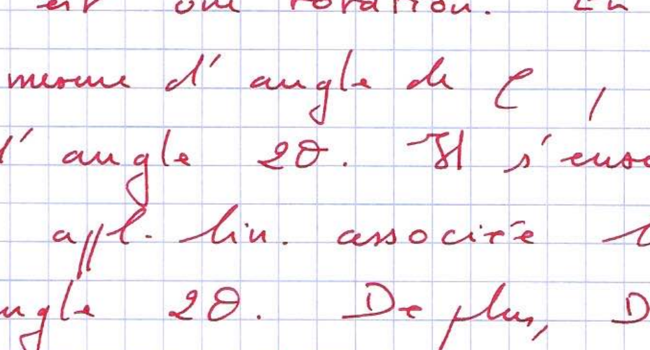
car $s(O) = O$

Par conséquent, si l'on considère un point O arbitraire de D et si O' est son proj. $\perp$ sur D, $s' \circ s$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.



__Commentaire :__ ce qui précède montre en particulier que, si l'on prend Π sur D et si Π' est son projeté sur D', le vecteur $\overrightarrow{\Pi\Pi'}$ est indépendant du choix de Π. En fait, D' est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Ce qui précède montre aussi que, pour un point Π quelconque : $\overrightarrow{\Pi\, s'\circ s(\Pi)} = 2\overrightarrow{OO'}$.

1.2 D et D' ne sont pas parallèles. Notons $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ des vecteurs unitaires tq $\vec{D} = \mathbb{R}\vec{u}$ et $\vec{D'} = \mathbb{R}\vec{u'}$. On sait par l'exercice 6.26 du chapitre $\underline{\text{VI}}$ qu'il existe une unique rotation vectorielle ρ tq $\vec{u'} = \rho(\vec{u})$. On sait aussi, d'après l'ex. 6.27 du chap $\underline{\text{VI}}$, que $\vec{s'}\circ\vec{s}$ est une rotation. En fait, si θ est la mesure d'angle de ρ, $\vec{s'}\circ\vec{s}$ est de mesure d'angle 2θ. Il s'ensuit que $s'\circ s$ a pour appl. lin. associée la rotation de mesure d'angle 2θ. De plus, D et D' sont sécantes et $D\cap D'$ est un singleton. Posons $D\cap D' = \{O\}$. Le point O est fixe pour $s'\circ s$. Donc $s'\circ s$ est la rotation de centre O et de mesure d'angle 2θ.



2. Le groupe $Is(E)$ est l'ensemble des isométries de E et sa loi de comp. est la composition des applications. Il s'agit de mq : toute isométrie de E est la composée de réflexions. Mais, on sait par la class. des isométries en dim. 2 que toute isométrie est :
soit l'identité (i.e transl. de vecteur nul)
soit une translation
soit une rotation
soit une ~~sym. glissée / quelconque~~ réflexion
soit une sym. glissée.

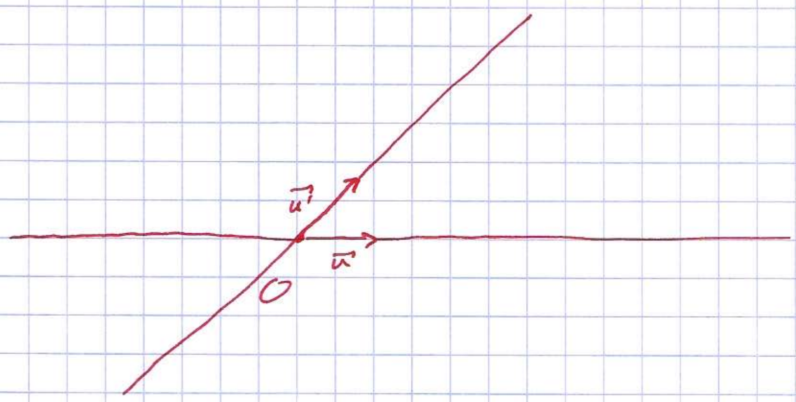
~~[illegible]~~ Il suffit donc de mq toute translation et toute rotation est composée de réflexions.

<u>Le cas des translations :</u> Soit $\vec{u} \in \vec{E}$ et $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Considérons une droite D quelconque tq $\vec{D} = (\mathbb{R}\vec{u})^{\perp}$. L'image D' de D par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ est ~~[illegible]~~ une droite parallèle à D. En effet, (cf VII.3.8 2))

$$\overrightarrow{T_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)} = \overrightarrow{T_{\frac{1}{2}\vec{u}}}(\vec{D}) = id_{\vec{E}}(\vec{D}) = \vec{D}.$$

La question 1.1 mq, si s est la réfl. $\perp$ par rapp. à D et s' la réfl. $\perp$ par rapp. à D', alors $T_{\vec{u}} = s' \circ s$.
Donc $T_{\vec{u}}$ est la comp. de réflexions.

<u>Le cas des rotations</u> : Si ρ une rotation affine, de centre O et de mesure d'angle θ. On considère la rotation r de centre O et de mesure d'angle $\theta/2$. Si $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{E}$ et D la droite de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ et contenant O. Si $\vec{u}' = r(\vec{u})$ et D' la droite de direction $\vec{u}'$ et contenant O.



La question 1.2 mq, si l'on note s (resp. s') la réflexion par rapport à D (resp. D'), alors $s' \circ s = \rho$. Donc ρ est composée de réflexions.