Pour simplifier, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $D_1 = \{(-\lambda, 1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$. On en déduit que D_1 est la droite affine dirigée par le vecteur $(-1, 0, 1)$ et contenant le point $(0, 1, 0)$.

On trouve de même que $D_2 = \{(1, \mu, -2\mu - 3), \mu \in \mathbb{R}\}$ et D_2 est dirigée par $(0, 1, -2)$ et contient $(1, 0, -3)$.

2. S_1 est la sym. $\perp$ par rapport à D_1. Pcq, $\overrightarrow{S_1}$ est la sym. $\perp$ par rapport à $\overrightarrow{D_1} = \mathbb{R}(1, 0, -1)$. On a donc :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\overrightarrow{S_1} - id) \oplus \operatorname{Ker}(\overrightarrow{S_1} + id)$$

avec $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{S_1} - id) = \mathbb{R}\vec{u_1}$

$\operatorname{Ker}(\overrightarrow{S_1} + id) = \operatorname{Vect}(\vec{u_2}, \vec{u_3})$

où $\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ et $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont tq $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ soit une b.o.n. On peut choisir $\vec{u_2} = (0, 1, 0)$ et $\vec{u_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. On pose $\mathcal{U} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$.

Il est clair alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\vec{s}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Rmq :</u> En dim. 3, une sym. $\perp$ par rapport à une droite est une rotation ! Cela se voit dans la matrice ci-dessus. En effet, $\mathcal{U}$ est une bond qui commence par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_1$ dirige l'ensemble des points fixes de s_1 qui n'est autre que D_1. La mesure d'angle de la rotation s_1 relat. au choix de $\vec{u}_1$ pour orienter son axe est donc $\theta = \pi$ (à 2π-près bien sûr).

Calculons maintenant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{s}_1)$, où $\mathcal{E}$ est la base canonique. On a

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et P est orthogonale donc : $P^{-1} = {}^tP$. Un calcul facile donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{s}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\vec{s}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-z,-y,-x)$$

On sait qu'alors, il existe un unique triplet (a,b,c) de réels tq

$$S_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-z+a,-y+b,-x+c)$$

Mais, tout point de D_1 est fixe pour S_1. En prenant $(0,1,0)$, on obtient que $a=0$, $b=2$, $c=0$.

Finalement :

$$S_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-z,-y+2,-x)$$

Un ~~méthode~~ raisonnement similaire donne :

$$S_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(-x+2, -\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z-\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}y+\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}\right)$$

2. On a $u = S_1 \circ S_2$. Comme S_1 et S_2 sont des isométries positives, $S_1 \circ S_2$ aussi.
Avec les expressions explicites de S_1 et S_2 obtenues en 1, il est facile de calculer l'expression explicite de u. On trouve que

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}z+\frac{6}{5}, \frac{3}{5}y+\frac{4}{5}z+\frac{22}{5}, x-2\right)$$

Par ailleurs : soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$(x,y,z) \in \mathrm{Fix}(u)$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z + \frac{6}{5} = x \\ \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{22}{5} = y \\ x \qquad\qquad -2 = z \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} -5x + 4y - 3z + 6 = 0 \\ \quad -2y + 4z + 22 = 0 \\ x \qquad - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x \qquad - z = 2 \\ \quad + y - 2z = 11 \\ \quad y - 2z = 1 \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Fix}(u) = \emptyset$.
La classification des isométries en dim 3 assure donc que u est un vissage (et ni une rotation, ni une translation). Il reste à déterminer les éléments de ce vissage : axe, mesure d'angle et vecteur de translation.

Rappelons que l'on doit avoir $u = \rho \circ T_{\vec{a}}$ où ρ est une rotation et $\vec{a}$ un vecteur appartenant à l'axe de $\vec{\rho}$. On note Δ l'axe de ρ. Bien sûr, $\vec{u} = \overrightarrow{\rho \circ T_{\vec{a}}} = \vec{\rho} \circ \vec{T_{\vec{a}}} = \vec{\rho}$.

Il est facile de calculer $\vec{\Delta}$. En effet, c'est l'axe de la rotation vectorielle $\vec{\rho}$, càd que

$$\vec{\Delta} = \ker\left(\vec{\rho} - id\right) = \ker\left(\vec{u} - id\right)$$

Un calcul simple montre que

$$\vec{\Delta} = \mathbb{R}\left(1, 2, 1\right).$$

La détermination de l'axe Δ du vissage u est plus délicate. On peut remarquer que cet axe est une droite affine de direction $\vec{\Delta}$ et ~~[illegible]~~ globalement invariante par u, càd telle que $u(\Delta) \subseteq \Delta$. C'est ce que suggère l'énoncé. Ainsi, si M ~~[illegible]~~ $\in \Delta$, on aura $\Delta(M) \in \Delta$ et donc $\overrightarrow{M\Delta(M)} \in \vec{\Delta}$. On est donc amené à chercher les points M ~~[illegible]~~ $\in \mathbb{R}^3$ tq $\overrightarrow{Mu(M)} \in \vec{\Delta}$.

Voici comment procéder.

St $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$\overrightarrow{Mu(M)} \in \vec{\Delta}$

ssi $\overrightarrow{Mu(M)}$ et $(1, 2, 1)$ sont liés

Mais $\overrightarrow{Mu(M)} = \left(-x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z + \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{22}{5}, x - z - 2\right)$

Donc $\overrightarrow{Mu(M)}$ est lié à $(1, 2, 1)$

ssi la matrice

$$\begin{bmatrix} -x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z + \frac{6}{5} & 1 \\ -\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{22}{5} & 2 \\ x - z - 2 & 1 \end{bmatrix}$$

est de rang 1

ssi tous les mineurs 2×2 de cette matrice sont nuls, càd

$$\begin{cases} -x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z + \frac{6}{5} = x - z - 2 \\ -\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{22}{5} = 2(x - z - 2) \\ 2\left(-x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z + \frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{22}{5} \end{cases}$$

ssi

⋮

ssi
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 5x - 2y - z - 8 = 0 \\ 5x + y - 7z - 21 = 0 \end{cases}$$

ssi
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 3y - 6z - 13 = 0 \end{cases}$$

On a mq : si $\underset{(x,y,z)}{\overset{\parallel}{\Pi}} \in \Delta$, alors

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 3y - 6z - 13 = 0 \end{cases}$$

Comme l'ensemble des (x, y, z) vérifiant les deux éq. ci-dessus est une droite (car intersection de deux plans non parallèles), on a :

$$\Delta = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + z + 1 = 0 \text{ et } 3y - 6z - 13 = 0 \}$$

On remarque au passage que l'on retrouve bien avec cette description de Δ que $\vec{\Delta} = \mathbb{R}(1,2,1)$.
Mais, maintenant, on connait un point de Δ : par ex. : $\Omega = \left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}, 0\right)$.

Le calcul du vecteur de translation $\vec{a}$ est alors très simple. Comme $\Omega \in \Delta$, on a $\rho(\Omega) = \Omega$ et donc $u(\Omega) = T_{\vec{a}}(\Omega)$ puisque $u = \rho \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ \rho$. Posons $\Omega' = u(\Omega)$. On a donc

$$\vec{a} = \overrightarrow{\Omega \Omega'}$$

Et on peut calculer Ω' facilement avec l'expression explicite de u. Je vous laisse le détail...

Il ne reste plus qu'à calculer la mesure d'angle de ρ (càd de $\vec{\rho}$) ~~en quel~~ pour l'orientation de $\vec{\Delta}$ donnée par $\vec{u}$. Il suffit pour cela de calculer la matrice de $\vec{\rho}$ ds une b.o.n.d.

commençant par $\vec{u}$, ce qui est facile. Là encore, je vous laisse les détails...

4. On pourrait procéder comme au 3. Mais il y a beaucoup plus simple. Posons $v = S_2 \circ S_1$. Alors

$$u \circ v = S_1 \circ S_2 \circ S_2 \circ S_1$$
$$= id.$$

Càd que v est l'inverse de u. Par csq $v = r \circ T_{-\vec{a}}$ où r est la rotation d'axe Δ et de mesure d'angle $-\theta$ pour l'orientation de Δ par $\vec{u}$.