

Exercice N.8.10

①

Objectif : Dans les trois questions, on se donne une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit de déterminer le sous-espace vectoriel qu'elle engendre et de dire si elle est libre ou pas.

Méthode : On va mettre en lumière, sur l'ex. de la question 1, le lien qui existe entre les deux objectifs ci-dessus et la résolution d'un système linéaire. On soulignera en particulier l'intérêt qu'il y a à mettre en évidence, dès le début du travail, le système pertinent, puis à le résoudre "hors contexte" et ensuite à interpréter les résultats de cette résolution afin de répondre aux questions posées.

Attention : Lorsque les vecteurs considérés contiennent des paramètres, les résultats obtenus dépendent de ces derniers et il faut envisager diff. cas. La bonne vision d'un paramètre consiste à le percevoir comme une valeur numérique "cachée" et pour laquelle il faut envisager toutes les possibilités. C'est dans la résolution du système que l'on met en évidence les diff. cas à envisager pour la valeur des paramètres.

(2)

1/ On pose $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (1, m, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -m)$.
On note $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3 .

$\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont comb. linéaires de v_1, v_2 et v_3 . On a donc la suite d'équivalence suivante pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(a, b, c) \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ tq } (a, b, c) = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

$$\Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ tq}$$

$$(a, b, c) = x(2, 1, 3) + y(1, m, 1) + z(-1, 1, -m)$$

$$\Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ tq}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

Pour (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on est donc amené à considérer le système suivant :

$$y_{m, (a, b, c)} \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

Attention : ce syst. dépend de quatre paramètres, m, a, b, c . Cependant le statut de m est diff. de celui de a, b et c : m est une donnée initiale du problème, inconnue et fixée ; (a, b, c) est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ quelconque dont on cherche à savoir s'il est, ou non, comb. lin. de v_1, v_2 et v_3 . Les différents cas devant être envisagés porteront donc sur m .

La question de la liberté de (v_1, v_2, v_3) , à présent, est la suivante : existe-t-il des relations "non triviales" entre v_1, v_2 et v_3 . Plus précisément : existe-t-il des réels x, y, z non tous nuls tels que $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$.

On est conduit vers l'équivalence suivante :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2, 1, 3) + y(-1, m, 1) + z(-1, 1, -m) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 3x + y - mz = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \text{ est sol. de } \mathcal{L}_{m, (0, 0, 0)}.$$

Bilan : les deux questions posées : description de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et liberté de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ s'avèrent donc liées à l'ens. des solutions d'un syst : $\mathcal{L}_{m, (a, b, c)}$. La réponse est la suivante :

1. $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est dans $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si ~~il existe une solution au système~~ $\mathcal{L}_{m, (a, b, c)}$.
2. $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre si, et seulement si, $\mathcal{L}_{m, (0, 0, 0)}$ admet $(0, 0, 0)$ pour unique solution.

Résolution de $J_{m,(a,b,c)}$.

Soit $m \in \mathbb{R}$ (fixé par l'énoncé) et soit (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ (fixé par le raisonnement précédent).

Pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$J_{m,(a,b,c)} = \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = b \\ 2x + y - z = a \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = b \\ (1-2m)y - 3z = a - 2b \\ (1-3m)y - (m+3)z = c - 3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + my = b \\ -3z + (1-2m)y = a - 2b \\ -(m+3)z + (1-3m)y = c - 3b \end{cases}$$

(6)

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z + my = b \\ z + \frac{2m-1}{3}y = \frac{2b-a}{3} \\ (m+3)z + (3m-1)y = 3b-c \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z + my = b \\ z + \frac{2m-1}{3}y = \frac{2b-a}{3} \\ \frac{3(3m-1) - (m+3)(2m-1)}{3}y = \frac{3(3b-c) - (m+3)(2b-a)}{3} \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z + my = b \\ z + \frac{2m-1}{3}y = \frac{2b-a}{3} \\ \frac{-2m^2 + 4m}{3}y = \frac{(m+3)a - (2m-3)b - 3c}{3} \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z + my = b \\ z + \frac{2m-1}{3}y = \frac{2b-a}{3} \\ 2m(\overset{m-2}{\cancel{2m}})y = -(m+3)a + (2m-3)b + 3c \end{cases}$$

A ce stade, la ~~matrice~~^{mise} de $J_{m,(a,b,c)}$ sous forme triangulaire est terminée et il est clair que l'ens. des solutions dépendra de ce que le produit des termes diagonaux est nul ou pas. Trois cas apparaissent donc.

1^{er} Cas : $m(m-2) \neq 0$; c-à-d $m \notin \{0, 2\}$
l'ensemble des solutions est un singleton.

2^e Cas : $m = 0$

$$J_{0,(a,b,c)} = \begin{cases} x + z & = b \\ z - \frac{1}{3}y & = \frac{2b-a}{3} \\ 0y & = -3a - 3b + 3c \end{cases}$$

Deux sous-cas, déterminés par (a, b, c) sont à distinguer.

1^{er} s-cas : $a + b - c \neq 0$

la troisième éq. n'a pas de solution donc le système non plus.

2^e s-cas : $a + b - c = 0$

la troisième éq. est triviale et tout choix de y donne une solution du système.

3^e Cas : $m = 2$

$$Y_{2, (a, b, c)} \iff \begin{cases} x + y + 2y = b \\ y + y = \frac{2b-a}{3} \\ 0y = -5a + b + 3c \end{cases}$$

1^{er} n-cas : $5a - b - 3c \neq 0$
le système n'a pas de solution.

2^e n-cas : $5a - b - 3c = 0$
le syst a des solutions.

On est maintenant prêt à passer à la description de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et à déterminer si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou pas. de Bilan chère page 4 et le guide.

1^{er} Cas Si $m \notin \{0, 2\}$

- Tout (a, b, c) est ds $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$;
càd $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$.
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

2^e Cas Si $m = 0$.

- $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + b - c = 0\}$
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée

3^e Cas $\Sigma: m = 2$.

- $\text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 5a - b - 3c = 0 \}$
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ est ~~linéaire~~ liée.

Résultats complémentaires

Il est important de remarquer le point suivant: dans tout ce qui précède, l'attention a été concentrée sur la "taille" des ensembles de solutions des systèmes $\Sigma_m(a, b, c)$ sans qu'il ne soit utile de les décrire explicitement.

Voici quelques questions (et leur réponse) qui nécessitent d'aller plus en profondeur dans la description des ensembles de solutions.

Question 1: On suppose ici que $m = 0$.

Le vecteur $(0, 1, 1)$ est-il dans $\text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\}$?
Le vecteur $(2, 1, 1)$ est-il dans $\text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\}$?
Dans l'affirmative, écrire le vecteur concerné comme comb. lin. de v_1, v_2 et v_3 .

Réponse: La description de $\text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\}$ de la page 8 assure qu'un vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ lui appartient si $a + b - c = 0$. Donc c'est le cas de $(0, 1, 1)$ mais pas de $(2, 1, 1)$.

Par ailleurs, comme $(0, 1, 1)$ est dans
Vect $\{v_1, v_2, v_3\}$, il est c.lin. de v_1, v_2 et v_3 .
De plus, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(0, 1, 1) = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

ssi (x, y, z) est sol. de $\mathcal{L}_{(0,1,1)}$ (cf. page 2)

Il nous faut donc décrire l'ens. des
sol. de $\mathcal{L}_{(0,1,1)}$. Or, d'après la page 7,

$$\mathcal{L}_{(0,1,1)} = \begin{cases} x + z = 1 \\ z - \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \\ 0y = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + z = 1 \\ z - \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc l'ens. de ses solutions est :

$$\left\{ \left(-\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}, \alpha, \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3} \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

En prenant $\alpha = 1$, on trouve donc que $(0, 1, 1)$

$$(0, 1, 1) = v_2 + v_3$$

On trouverait de même que $(2, -1, 1) = v_2 - v_3$.

On notera que les coeff. de la comb. lin.
obtenue dépendent de la valeur donnée à y ; il
y en a donc une infinité.

(11)

Question 2 : On suppose encore $m = 0$.

Déterminer une relation, non triviale, de dép. lin. entre v_1, v_2 et v_3 .

D'après la page 3, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ssi (x, y, z) est sol. de $\mathcal{L}_{0, (0,0,0)}$. Or, d'après la page 7, l'ens. des sol. de $\mathcal{L}_{0, (0,0,0)}$ est

$$\left\{ \left(-\frac{1}{3}x, x, \frac{1}{3}x \right), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le choix de $x = 3$ donne donc

$$-v_1 + 3v_2 + v_3 = 0. \quad (*)$$

On déduit de cela que

$$\begin{aligned} \text{Vect} \{ v_1, v_2, v_3 \} &= \text{Vect} \{ v_1, v_2 \} \\ &= \text{Vect} \{ v_1, v_3 \} \\ &= \text{Vect} \{ v_2, v_3 \} \end{aligned}$$

puisque chacun des vect. v_1, v_2 et v_3 est c. lin. des deux autres, d'après (*).

2) On pose $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (4, 1, 1)$, $v_3 = (1, 5, 1)$. (12)

En s'inspirant de la méthode suivie à la question 1), on commence par résoudre les systèmes $\mathcal{Y}_{(a,b,c)}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, suivant

$$\mathcal{Y}_{(a,b,c)} = \begin{cases} 3x + 4y + z = a \\ 2x + y + 5z = b \\ x + y + z = c \end{cases}.$$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\mathcal{Y}_{(a,b,c)} = \begin{cases} x + y + z = c \\ 2x + y + 5z = b \\ 3x + 4y + z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = c \\ +y - 3z = 2c - b \\ y - 2z = a - 3c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = c \\ y - 3z = 2c - b \\ z = a + b - 5c \end{cases}$$

On constate donc que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{Y}_{(a,b,c)}$ admet une solution et une seule. En raisonnant comme à la question 1, il s'ensuit que tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ est dans $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$$

Il s'ensuit aussi que l'unique solution de $\mathcal{Y}_{(0,0,0)}$ est $(0, 0, 0)$, ce qui assure que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

3) On pose $v_1 = (m, 1, 1)$, $v_2 = (1, m, 1)$, $v_3 = (1, 1, m)$

On suit la même procédure que précédemment.

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère donc

$$\mathcal{Y}_{m,(a,b,c)} = \begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

et

$$\mathcal{Y}_{m,(a,b,c)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = c \\ x + my + z = b \\ mx + y + z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = c \\ (m-1)y + (1-m)z = b-c \\ (1-m)y + (1-m^2)z = a-mc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = c \\ (m-1)y + (1-m)z = b-c \\ (2-m-m^2)z = a+b-(m+1)c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = c \\ (m-1)y + (1-m)z = b-c \\ (m-1)(m+2)z = -a-b+(m+1)c \end{cases}$$

Ce qui précède montre que l'ensemble de solutions (en particulier leur "taille") dépendra de l'annulation ou non du produit $(m-1)^2(m+2)$ des termes diagonaux. On distingue donc trois cas.

1^{er} Cas: $m \notin \{-2, 1\}$

Alors, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}_{m, (a, b, c)}$ admet une solution, et une seule. Il s'ensuit que $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$ et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

2^e Cas: $m = 1$

$$\mathcal{Y}_{1,(a,b,c)} = \begin{cases} x+y+z = c \\ 0z = b-c \\ 0z = a+b-2c \end{cases}$$

Il est clair alors que $\mathcal{Y}_{1,(a,b,c)}$ ~~admet~~ a un cas. de sol. non vide si $b-c=0$ et $a+b-2c=0$.
Donc $(a,b,c) \in \text{Vect}$ si $b-c=0$ et $a+b-2c=0$:

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b-2c=0, b-c=0\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1,1,1)\} \end{aligned}$$

Il est clair aussi que $\mathcal{Y}_{1,(0,0,0)}$ a des solutions ~~non~~ autres que $(0,0,0)$. Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.

3^e Cas: $m = -2$

$$\mathcal{Y}_{-2,(a,b,c)} = \begin{cases} x+y-2z = c \\ 3y-3z = c-b \\ 0z = a+b+c \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b+c=0\}$
et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.