

Exercice VI.8.15

1

Contexte : Cet exercice traite le problème du calcul des noyaux et images d'une application linéaire entre e.v. K^n , où K est un corps. Les énoncés de cours qui seront le plus utile sont les suivants : Exercice VI.2.13 et Proposition VI.2.14.

L'exercice VI.2.13 (sur lequel on reviendra plus tard) assure que les applications de l'énoncé sont des applications linéaires.

La ^{Proposition} ~~Proposition~~ VI.2.14 met en évidence le point suivant : si l'e.v. de départ est K^n et si $e_1, \dots, e_n$ sont les vecteurs d'une base quelconque, par ex. la base canonique, alors $\text{Im}(f)$ est le rev eng. par $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Ainsi, la détermination de $\text{Im}(f)$ est ramenée à une question déjà abordée à l'ex. VI.8.10 : calculer le rev eng. par une famille donnée. Comme le calcul de $\text{Ker}(f)$ conduit à un système linéaire (homogène), on voit que la situation est très proche de celle de l'Exercice VI.8.10. On suivra donc une approche semblable.

(2)

1) On fixe le paramètre k de $\mathbb{R}$.

Bien sûr, $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ dépendent de la valeur de k . Il faut donc s'attendre à ~~des~~ avoir à traiter des cas distincts suivant cette valeur.

Comme précédemment mentionné, on suit l'approche de l'ex. VI.8.10. On commence par observer que, vue la Prop. VI.2.14,

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect} \{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \} \\ &= \text{Vect} \{ (1, 2), (2, k), (k, 8) \}.\end{aligned}$$

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a le syst.

$$J_{k, (a, b)} = \begin{cases} x + 2y + kz = a \\ 2x + ky + 8z = b \end{cases}$$

Le calcul de $\text{Im}(f)$ revient à la question : pour quels couples (a, b) ce syst. a-t-il une solution. Le calcul de $\text{Ker}(f)$ revient à la détermination des solutions de $J_{k, (0, 0)}$.

On applique la mth. du Pivot:

$$\mathcal{L}_{k,(a,b)} \iff \begin{cases} x + 2y + kz = a \\ (k-4)y + (8-2k)z = b-2a \end{cases}$$

Le ~~nombre~~ des solutions du syst. dépend donc de l'association du produit des termes diag. c-à-d qu'il y a à distinguer deux cas:

1^{er} cas: $k-4 \neq 0$

$$\mathcal{L}_{k,(a,b)} = \begin{cases} x + 2y + kz = a \\ y - 2z = \frac{b-2a}{k-4} \end{cases}$$

Ce syst. admet des solutions pour toutes les valeurs de (a,b) . Comme

$$\text{Im}(f) = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{L}_{k,(a,b)} \text{ admet une sol.} \right\}$$

on a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Par ailleurs: $\text{Ker}(f)$ est l'ens. des sol. de $\mathcal{L}_{k,(a,b)}$; donc:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{ (-(4+k)\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \{ (4+k, -2, -1) \}. \end{aligned}$$

(4)

2^e Cas : $k = 4$

$$y_{4, (a, b)} = \begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ 0y + 0z = b - 2a. \end{cases}$$

Il est clair que ce système admet des solutions si, et seulement si, $b - 2a = 0$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect} \{ (1, 2), (2, 4), (4, 8) \} \\ &= \{ (a, b) \in \mathbb{R} \mid 2a - b = 0 \} \end{aligned}$$

Comme $(2, 4) = 2(1, 2) = 4(1, 2)$ tout ceci se réécrit :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect} \{ (1, 2) \} \\ &= \{ (a, b) \in \mathbb{R} \mid 2a - b = 0 \} \end{aligned}$$

Note : la première identité décrit $\text{Im}(f)$ en en donnant une base ;
la seconde, via des équations.

Enfin: $\ker(f) = \text{Sol}(\mathcal{I}_{4,(0,0)})$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 4z = 0 \}$$

$$= \{ (-2\alpha - 4\beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha(-2, 1, 0) + \beta(-4, 0, 1) \}$$

$$= \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}.$$

La première description de $\ker(f)$ est une description par équations, la seconde et la troisième par paramètres, la quatrième par base.

2) On procède comme ci-dessus. ~~On~~
Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a le syst.

$$\mathcal{I}_{(a,b,c,d)} \left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y - 3z & = & a \\ x + 3y - z & = & b \\ 2x + 5y - 5z & = & c \\ x + 4y - z & = & d \end{array} \right.$$

(6)

On applique la méth. du pivot; elle donne:

$$f(a, b, c, d) \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ y + 2z = b - a \\ z = a + b - c \\ z = 3a - 2c + d \end{cases}$$

Il s'ensuit que:

$$\text{Ker}(f) = \{ (0, 0, 0) \}$$

$$\text{et } \text{Im}(f) \stackrel{(1)}{=} \text{Vect} \{ (-1, 1, 2, 1), (2, 3, 5, 4), (-3, -1, -5, 1) \}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / 3a - 2c + d = 0 \}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \left\{ \left(\frac{1}{3}(2\beta - \gamma), \alpha, \beta, \gamma \right), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \left\{ \alpha (0, 1, 0, 0) + \beta \left(\frac{2}{3}, 0, 1, 0 \right) + \gamma \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

$$\stackrel{(5)}{=} \text{Vect} \left\{ (0, 1, 0, 0), \left(\frac{2}{3}, 0, 1, 0 \right), \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

$$\stackrel{(6)}{=} \text{Vect} \{ (0, 1, 0, 0), (2, 0, 3, 0), (1, 0, 0, -3) \}$$

(1), (6) donnent une desc. par f.g.

(6) donne " " " base

(2) donne une desc. par eq.

(3) " " " paramètres

(4) est une transition d'une desc. par param. à une description par base.