Ex. VI.8.4

Contexte : L'objectif de cet exercice est de souligner quelques points importants sur la notion de "somme directe" de sous-espaces vectoriels.

Les énoncés pertinents du cours sont ceux numérotés VI.1.22 à VI.1.27 et en particulier la Prop. VI.1.24 et la Définition VI.1.25.

Sur l'utilisation de la Prop. VI.1.24 : L'énoncé de la Prop. VI.1.24 donne trois moyens de vérifier qu'une somme de ss-e.v. est unique. Attention cependant : le troisième critère est très diff. à utiliser dès qu'on a à traiter trois ss-ev. ou plus.

Le cas de deux ss-ev :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux ss-ev. de E. Le troisième critère de la Prop. VI.1.24 dit que F et G sont en somme directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Il est donc facile à vérifier.

Le cas de trois ss-ev. :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et F, G, H trois ss-ev. de E. Le troisième critère (de la Prop. VI.1.24) assure que F, G et H sont en somme directe si, et seulement si :

* $F \cap (G+H)$, $G \cap (F+H)$ et $H \cap (F+G)$ sont tous égaux à $\{0\}$. Pour l'obtenir, il faut donc calculer $G+H$, $F+H$, $F+G$ et ensuite les trois intersections ci-dessus. C'est souvent très pénible. Pour cette raison, on utilisera plutôt le premier critère. La même chose vaut (en pire) pour quatre sev ou plus.

Attention : Si E est un $\mathbb{R}$-ev et F, G, H des sev de E. Il se peut fort bien que l'on ait $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$ et que, pourtant, F, G, H ne soient pas en somme directe.

C'est le cas, par ex., lorsque $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}(1,0)$, $G = \mathbb{R}(1,1)$, $H = \mathbb{R}(0,1)$.

En effet,

$$-(1,0) + (1,1) + (0,1) = (0,0)$$

contredit le critère (i) de la Prop. VI.14

Exercice VI.8.4

Comme conseillé plus haut, pour montrer que F, G et H sont en somme directe, on va utiliser le premier critère de la Prop. VI.1.24.

On a donc des applications f, g, h respectivement dans F, G et H, on suppose que $f+g+h=0$ et on doit montrer que cela entraîne que $f=g=h=0$.

L'égalité $f+g+h=0$ signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)+g(x)+h(x)=0.$$

Mais, par déf. de G et H, $g(0)=h(0)=0$. On a donc $f(0)=0$. Et, comme f est constante, $f=0$.

Soit maintenant $x>0$. On a $f(x)=0$ (cf. ci-dessus) et $g(x)=0$ par déf. de G. Donc $h(x)=0$. Ceci vaut aussi, par définition de H, pour tout $x \leq 0$. Donc $h=0$.

On démontre de la même façon que $g=0$. Le premier critère de la Prop. VI.1.24 assure alors que la somme de F, G et H est directe :

$$F+G+H = F \oplus G \oplus H \subseteq E.$$

Il reste à démontrer que $F+G+H=E$, c'est à dire que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être "décomposée" comme somme d'une application de F, d'une dans G et d'une dans H.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une telle application. On pose les applications suivantes :

$f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; c'est un élément de F ;
$x \longmapsto f(0)$

$f^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est un élément de G ;
$x \longmapsto 0$ si $x \geq 0$
$x \longmapsto f(x) - f(0)$ si $x < 0$

$f^- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est un élément de H
$x \longmapsto 0$ si $x \leq 0$
$x \longmapsto f(x) - f(0)$ si $x > 0$

Il est clair, par ailleurs, que

$$f = f_0 + f^+ + f^- .$$

Donc $E = F + G + H$.

Concl. : $E = F \oplus G \oplus H$.