

Exercice VI.8.9

(1)

Soient E, F des K -ev et $f: E \rightarrow F$ une app. lin.

1) Injectivité et familles libres

On va montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
Il est trivial que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose f injective.
Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille ^{libre} d'elt de E .
On doit montrer que la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille (presque nulle) de scalaires. On a : $f(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$.
Donc, si $\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$, on a aussi $f(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = 0$, et comme f est injective, il s'ensuit que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais, comme $(x_i)_{i \in I}$ est libre, cela entraîne que les scalaires $\lambda_i, i \in I$, sont tous nuls.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ une base de E telle que $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre.

Soit $x \in \ker(f)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe une famille presque nulle de scalaires, $(\lambda_i)_{i \in I}$ tq $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$.

(2)

On a alors $0 = f(x) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(b_i)$
 Mais, $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre. Donc, pour $i \in I$, $\lambda_i = 0$. Il s'ensuit que $x = 0$.

On a bien montré que f est injective.

2) Surjectivité et familles génératrices

les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est surjective,

(ii) l'image par f de toute famille gén. de E est une famille génératrice de F .

(iii) il existe une base de E dont l'image par f est une famille génératrice de F .

La démonstration est semblable à celle de la question 1; les détails sont laissés au lecteur.

3) Bijektivité et bases

les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est bijective ;
- (ii) l'image de toute base par f est une base de F ;
- (iii) il existe une base de E dont l'image par f est une base de F .
Cela se déduit immédiatement de 1) et 2).

Commentaires :

(a) Il est dit plus haut que (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial. C'est un peu exagéré ! Pour argumenter cette implication, il faut savoir que :
~~la~~ toute famille libre est contenue dans une base et que toute famille génératrice contient une base. En dimension finie, le Théorème 11.2.3 énonce ces résultats. Il est vrai, en fait, en dimension quelconque.

(b) Dans la pratique, l'hypoth. (ii) est très diff. à vérifier. Les implications utilisées fréquemment sont donc :
 (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i).