

Fiche : *Lien entre familles de vecteurs et applications linéaires* *

L'objectif de cette fiche est d'expliquer la très grande parenté entre deux type d'exercices, à première vue différents, comme par exemple les Exercices VI.8.10 et VI.8.15. Cette parenté s'explique en soulignant un point très important, et aussi très éclairant.

Les détails sur le cadre de ce qui suit se trouvent dans le cours, Partie VI, Sections 1 et 2.

Rappelons d'abord deux problèmes fréquents en algèbre linéaire.

On se limite, ici, au cas *fini* où les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et les familles de vecteurs indexées par des ensembles finis. Cette précaution, en fait, est inutile. Tout ce qui suit s'étend, sans grande difficulté, au cas où la dimension et les ensembles d'indexation sont arbitraires.

Premier problème. Soit F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_l\}$ une famille de l vecteurs de F ($l \in \mathbb{N}^*$). D'une part, décrire les sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{F})$ de F engendré par $\mathcal{F}$. D'autre part, dire si $\mathcal{F}$ est libre, où liée.

Second problème. Soient $\mathbb{K}^l$ et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Décrire l'image et le noyau de f .

Il s'avère qu'en fait, ces deux problèmes sont extrêmement liés. A vrai dire, l'un n'est qu'une traduction (dans un langage un peu différent) de l'autre.

Le lien explicite est fait par le Théorème VI.2.12 et la Proposition VI.2.14.

Partons du premier problème. D'après le Théorème VI.2.12, et si $\{b_1, \dots, b_l\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^l$, il existe une application linéaire (et une seule) comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{K}^l \longrightarrow F \\ & & b_1 \mapsto v_1 \\ & & \vdots \\ & & b_l \mapsto v_l \end{array}$$

Et, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{K}^l, f((x_1, \dots, x_l)) = f(x_1 b_1 + \dots + x_l b_l) = x_1 v_1 + \dots + x_l v_l.$$

La Proposition VI.2.14 assure alors que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \ker(f) = \{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{K}^l \mid x_1 v_1 + \dots + x_l v_l = 0\}.$$

En particulier, $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, $\ker(f) = \{0\}$.

*Fiche-familles-versus-applications.tex, 19/10/2026

Partons maintenant du second problème. Soient $\mathbb{K}^l$ et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et

$$f : \mathbb{K}^l \longrightarrow F$$

une application linéaire. Posons $v_i = f(b_i)$, $1 \leq i \leq n$ et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Avec la Proposition VI.2.14 et un raisonnement comme ci-dessus, on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \ker(f) = \{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{K}^l \mid x_1 v_1 + \dots + x_l v_l = 0\}.$$