Fiche : *Projections et symétries vectorielles* *

L'objectif de cette fiche est de traiter les Exercices 8.6 et 8.7 de la Partie VI du cours. Ces deux exercices sont d'une très grande importance. Ils définissent et étudient les projections et symétries, *dans leur cadre vectoriel*. Des notions similaires seront vues plus tard, dans les cadres vectoriel euclidien, affine et affine euclidien.

1 Cadre général

Les détails sur le cadre se trouvent dans le cours, Partie VI, Section 1, de la Définition 1.22 à l'Exercice 1.27.

On pose $\mathbb{k}$ égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappels.
1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires s'ils sont en somme directe et si $E_1 \oplus E_2 = E$. Cela signifie que, pour tout $x \in E$, il existe un couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et un seul tel que $x = x_1 + x_2$. Ce qui précède provient de l'Exercice 1.7 du cours, avec des notations légèrement différentes, cohérentes avec les Exercices 8.6 et 8.7.
2. *Attention.* Il découle de la Proposition 1.24 que *deux* sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires si, et seulement si, $E_1 + E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Mais, il faut bien prendre garde que ce résultat est beaucoup plus difficile à exploiter dès que le nombre de sous-espaces excède deux (voir à ce sujet le troisième point de la Proposition 1.24) et il faut alors plutôt recourir à la première caractérisation de la même proposition (unicité d'écriture).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires.

On appelle projection sur E_1, parallèlement à E_2, l'application p_{E_1,E_2} ci-dessous, et symétrie par rapport à E_1, parallèlement à E_2, l'application s_{E_1,E_2} ci-dessous :

$$p_{E_1,E_2} \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad s_{E_1,E_2} \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} .$$

Dans la suite du cours, on appelera les définitions ci-dessus : *définitions géométriques*. Il n'est pas difficile de démontrer que les applications p_{E_1,E_2}et s_{E_1,E_2} sont linéaires. Je laisse les détails de cette vérification en exercice.

2 Caractérisation algébrique des projections et symétries.

La définition algébrique des projections et symétries est très facile à manipuler lorsque l'on part d'une décomposition de E en somme de sous-espaces supplémentaires. Par contre, elle est beaucoup moins pratique lorsqu'il s'agit de reconnaitre une projection ou une symétrie. On a alors

*Fiche-projections-symétries.tex, 20/10/2026

besoin d'une *caractérisation algébrique*. Cette dernière est l'objet des Exercices 8.6 et 8.7. Cette caractérisation est très importante.

Sens direct de la caractérisation (question 1 des Exercices 8.6 et 8.7).

Partons d'une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ et considérons les applications p_{E_1,E_2} et s_{E_1,E_2} ci-dessus. (On sait, d'après ce qui précède, qu'elles sont linéaires.) On pose $p = p_{E_1,E_2}$ et $s = s_{E_1,E_2}$ pour simplifier.

Pour tout $x = x_1 + x_2$ de E, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a :

$$p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_1) = p(x_1 + 0) = x_1 \quad \text{et} \quad p(x) = p(x_1 + x_2) = x_1.$$

De même :

$$s \circ s(x) = s(s(x)) = s(x_1 - x_2) = s(x_1 + (-x_2)) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_E(x) = x = x_1 + x_2.$$

On a donc $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Pour que la compréhension de p et s soit complète, on voudrait aussi *retrouver* E_1 et E_2 à partir de p et s. (Cela s'avèrera particulièrement utile lorsque l'on s'intéressera au sens réciproque de la caractérisation.)

Commençons par le cas de p. Soit $x = x_1 + x_2$ de E, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a $p(x) = x_1$, donc $x \in \ker(p)$ si, et seulement si $x = x_2 = 0 + x_2$, c'est-à-dire si, et seulement si $x \in E_2$. Donc $\ker(p) = E_2$. D'autre part, par définition de p, $p(x) \in E_1$ et, réciproquement, si $x \in E_1$, $x = x_1 + 0 = p(x) \in \mathrm{im}(p)$. On a donc

$$E_1 = \mathrm{im}(p) \quad \text{et} \quad E_2 = \ker(p).$$

Passons au cas de s (un peu plus subtil). Il est clair que, si $x \in E_1$, alors $s(x) = s(x + 0) = x$ et que si $x \in E_2$, alors $s(x) = s(0 + x) = -x$. Réciproquement, si $s(x) = x$, c'est-à-dire si $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$, on doit avoir $2x_2 = 0$ et donc $x_2 = 0$. De même, si $s(x) = -x$, c'est-à-dire si $x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2)$, on doit avoir $x_1 = 0$. Tout ceci montre que

$$E_1 = \{x \in E \,|\, s(x) = x\} = \ker(s - \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad E_2 = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\} = \ker(s + \mathrm{id}_E).$$

(Ainsi : E_1 est l'espace propre de s, de valeur propre 1 et E_2 est l'espace propre de s, de valeur propre -1.)

Sens réciproque de la caractérisation (question 2 des Exercices 8.6 et 8.7).

Partons, maintenant, d'une application linéaire $f : E \longrightarrow E$. La questions est la suivante : f est-elle une projection, et si c'est le cas, quels sont les sous-espaces E_1 et E_2 ; f est-elle une symétrie, et si c'est le cas, quels sont les sous-espaces E_1 et E_2 ? La clé est d'exploiter la partie *sens direct* ci-dessus, en raisonnant par analyse-synthèse.

Si f est une projection, alors on doit avoir $f \circ f = f$ et de plus, $E_1 = \mathrm{im}(p)$ et $E_2 = \ker(p)$. Ce ne peut donc être que la projection sur $\mathrm{im}(f)$, parallèlement à $\ker(f)$. Mais, ce dernier point n'est possible que si $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Partons donc de l'hypothèse $f \circ f = f$.

Pour en déduire que f est une projection, on *doit* donc montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Mais, pour tout $x \in E$, on a

$$x = f(x) + x - f(x),\ f(x) \in \mathrm{im}(f),\ f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0. \quad (2.1)$$

On a donc que $E = \mathrm{im}(f) + \ker(f)$. Il est aussi facile de vérifier que $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Par suite, $E = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$. Il reste à démontrer que f est la projection $p_{\mathrm{im}(f),\ker(f)}$. Mais, pour tout $x \in E$,

$$p_{\mathrm{im}(f),\ker(f)}(x) = p_{\mathrm{im}(f),\ker(f)}(f(x) + x - f(x)) = f(x)$$

(cf. (2.1)). Ce qui montre que $p_{\mathrm{im}(f),\ker(f)} = f$.

En partant de l'hypothèse que $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on peut démontrer de façon semblable que f est la symétrie par rapport à $\ker(f - \mathrm{id}_E)$, parallèlement à $\ker(f + \mathrm{id}_E)$.

Conclusion Ce qui précède assure donc que : une application linéaire de E dans E est une projection si, et seulement si $f \circ f = f$; une application linéaire de E dans E est une symétrie si, et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$; et que, dans les deux cas, les sous-espaces supplémentaires associés s'expriment à partir de f (comme des espaces propres).