

NOMBRES

nombres-MEEF.tex

03/09/2026

Sommaire

I	Entiers naturels.	4
1	L'ensemble des entiers naturels.	5
2	Opérations dans $\mathbb{N}$	9

Introduction.

Partie I

Entiers naturels.

Dans ce chapitre, on aborde l'ensemble des entiers naturels dont l'importance est évidemment fondamentale.

Bien sûr, cet ensemble est bien connu et l'intuition qu'on en a est largement suffisante pour travailler avec. Cependant, si l'on veut construire un édifice mathématique parfaitement cohérent, on ne peut pas se contenter de l'intuition et il faut alors poser la question de la *construction de l'ensemble des entiers naturels*. Les mathématiciens se sont posé cette question et y ont répondu en montrant qu'on pouvait construire de façon rigoureuse un ensemble dont les propriétés sont précisément celles que l'on attend de $\mathbb{N}$ si l'on se fie à l'intuition qu'on en a.

Malheureusement, cette construction ne peut être comprise que si l'on maîtrise parfaitement la théorie des ensembles dont on a déjà dit qu'elle est d'un grand degré de difficulté. La construction de $\mathbb{N}$ dépasse donc largement les objectifs d'un cours de base.

Pour cette raison, on va se contenter d'un objectif plus modeste mais qui suffit à mettre en évidence la démarche usuelle de la construction d'une théorie. On va montrer que l'on peut réduire toutes les propriétés de $\mathbb{N}$ à trois d'entre-elles, dites "axiomes de Peano". Ainsi, on va admettre l'existence d'un ensemble vérifiant ces trois axiomes. (C'est la démonstration de l'existence d'un tel ensemble qui est délicate et repose sur la théorie des ensembles.) Puis, on montrera que cet ensemble, dont on a admis l'existence, a toutes les vertues que l'on attend de l'ensemble intuitivement connu de tous comme l'ensemble des entiers naturels.

1 L'ensemble des entiers naturels.

On commence notre étude de $\mathbb{N}$ par sa description ensembliste.

Il faut bien prendre garde à une imprécision dans le vocabulaire utilisé dans la suite. Les assertions (A1), (A2) et (A3) du Théorème 1.1 sont souvent appelés *Axiomes de Peano*. Cette appellation a l'avantage de souligner que *toutes* les propriétés de $\mathbb{N}$ découlent de ces trois assertions. Cependant, ces axiomes sont en fait, bel et bien, des *propriétés* qui se démontrent sur la base des résultats d'un chapitre (antérieur) dit de *Théorie des ensembles*. L'énoncé qui suit est donc, au sens plein du terme, un *théorème*. Dans la suite, l'expression *présentation axiomatique* de $\mathbb{N}$ devra donc être comprise comme *réduction des propriétés de $\mathbb{N}$ aux trois d'entre elles, dont toutes les autres découlent*.

Théorème 1.1 – Axiomes de Peano – *Il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, un élément 0 de $\mathbb{N}$ et une application*

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto s(n) \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(A1) $0 \notin s(\mathbb{N})$;

(A2) s est injective ;

(A3) si A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contenant 0 et contenant l'image par s de chacun de ses éléments, alors $A = \mathbb{N}$.

Les assertions (A1), (A2) et (A3) sont appelées axiomes de Peano. L'assertion (A3) est appelé l'axiome de récurrence.

Démonstration : La démonstration du présent théorème relève de la *Théorie des ensembles*, qui est un chapitre fondamental et assez délicat de l'édifice mathématique. Pour cette raison, on admet, ici, ce résultat. ■

Remarque 1.2 – Axiomes de Peano, commentaires –

1. L'application s est appelée *application successeur* ; l'image par s d'un élément est appelé le successeur de cet élément. On note 1 le successeur de 0 : $1 = s(0)$. Il découle de (A1) que $0 \neq 1$.
2. L'axiome (A3) est appelé *axiome de récurrence*. Il a une traduction immédiate qui sera énoncée dans le Théorème ??.

Il est utile de remarquer, dès à présent, que (sous-couvert de l'axiome (A3)) l'axiome (A1) est en fait équivalent à un axiome plus restrictif. C'est l'objet de l'énoncé suivant.

Proposition 1.3 – Axiomes de Peano, compléments – Soit $(\mathbb{N}, 0, s)$ un triplet comme au Théorème 1.1. Alors, on a $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration : Posons $A = s(\mathbb{N}) \cup \{0\}$.

On a, $0 \in A$. De plus, $A \subseteq \mathbb{N}$, et donc $s(A) \subseteq s(\mathbb{N}) \subseteq s(\mathbb{N}) \cup \{0\} = A$. L'axiome (A3) assure donc que $A = \mathbb{N}$. On a montré que $s(\mathbb{N}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$. Il en découle que $s(\mathbb{N}) \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Mais, d'après (A1), $s(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On conclut donc que $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ■

La Proposition 1.3 a une conséquence utile, et éclairante, que l'on détaille maintenant.

Corollaire 1.4 – Soit $(\mathbb{N}, 0, s)$ un triplet comme au Théorème 1.1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un élément $m \in \mathbb{N}$, et un seul, tel que $n = s(m)$. On note

$$p : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

l'application ainsi définie.

2. On a $s \circ p = \text{id}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$. En particulier, l'application p est injective.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La Proposition 1.3 assure l'existence d'un élément $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = s(m)$ et l'axiome (A2) garanti qu'un tel élément est unique. Cela démontre la première assertion. En outre, et par construction de p , on a $s \circ p = \text{id}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Et, il découle de l'égalité $s \circ p = \text{id}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ que p est injective. La seconde assertion est démontrée. ■

Enfin, le troisième axiome de Peano a une variante très utile lorsque l'on souhaite travailler dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. On l'énonce dès maintenant.

Lemme 1.5 – Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $1 \in A$ et $s(A) \subseteq A$, alors $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration : Soit $B = A \cup \{0\}$. On a que $0 \in B$ et $s(B) \subseteq A \subseteq B$. Le troisième axiome de Peano assure donc que $B = \mathbb{N}$ et, par conséquent, $A = B \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ■

Dans toute la suite, on fixe un triplet $(\mathbb{N}, 0, s)$ avec lequel on travaille. A ce stade, il y a un arbitraire dans ce *choix*, au sens où rien n'exclut la possibilité qu'il existe beaucoup de tels triplets, et que ceux-ci puissent être très différents. En fait, il n'en est rien, comme le souligne la Remarque 1.7. La démonstration de ce fait nécessite cependant un peu de travail préparatoire.

A ce stade de l'étude de l'ensemble des entiers naturels, nous ne disposons que des trois axiomes de Peano. Il est donc clair que toutes les propriétés de $\mathbb{N}$ que nous serons en mesure de

démontrer seront tributaires des ces trois axiomes. Il en sera ainsi des opérations dans $\mathbb{N}$, addition et multiplication, de la relation d'ordre, puis, des propriétés arithmétiques.

Le Théorème 1.1 est, somme toute, très intuitif. Il s'avère que l'on peut en déduire le Théorème 1.6 ci-dessous. Cela peut paraître un peu surprenant, dans la mesure où ce dernier est moins intuitif. Il n'en reste pas moins que le Théorème 1.6 est un outil indispensable pour être en position d'utiliser efficacement les axiomes de Peano dans la construction des diverses structures essentielles dont l'ensemble des entiers naturels peut être doté.

En un sens, bien qu'étant une conséquence du Théorème 1.1, le Théorème 1.6 complète celui-ci en révélant son réel potentiel. La clé de cette observation est la suivante : Le troisième axiome de Peano suffit à *vérifier* qu'une propriété indéxée par les entiers naturels est vraie, ce qui est déjà très utile. Le Théorème 1.6, quant à lui, permet de *construire* de nouveaux objets mathématiques. Pour cette raison, il sera d'une importance cruciale dans la suite.

Théorème 1.6 – Dedekind

Soient X un ensemble, a un élément de X et $f : X \longrightarrow X$ une application de X vers X . Il existe une unique application $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$ de $\mathbb{N}$ vers X satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $u(0) = a$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(s(n)) = f(u(n))$.

Démonstration : On commence par montrer l'existence de u .

Par définition, il s'agit donc de construire un graphe G de $\mathbb{N} \times X$, dont $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$ sera l'application associée, c'est-à-dire que $u = (\mathbb{N}, X, G)$, et tel que u satisfasse les conditions 1 et 2 de l'énoncé. Ainsi, G devra vérifier que $(0, a) \in G$ (cf. condition 1 de l'énoncé) et que, pour tous $(n, x) \in \mathbb{N} \times X$, si $(n, x) \in G$, alors $(s(n), f(x)) \in G$ (cf. condition 2 de l'énoncé).

Ces considérations conduisent à s'intéresser aux sous-ensembles S de $\mathbb{N} \times X$ vérifiant la propriété suivante :

$$(0, a) \in S \quad \text{et} \quad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times X, (n, x) \in S \implies (s(n), f(x)) \in S. \quad (1)$$

Bien-sûr, un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times X$ vérifiant (1) n'est pas nécessairement un graphe. Par exemple, $\mathbb{N} \times X$ lui-même vérifie (1) et n'est pas un graphe (sauf si X est un singleton).

On note G le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times X$ défini comme intersection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N} \times X$ vérifiant la propriété (1). Pour commencer, on observe facilement que G lui-même vérifie la propriété (1). En outre, et par définition, G est inclus dans tout sous-ensemble vérifiant la propriété (1) (en particulier, G ne contient strictement aucun sous-ensemble de $\mathbb{N} \times X$ satisfaisant (1)). En somme, l'ensemble de tous les sous-ensemble de $\mathbb{N} \times X$ vérifiant la propriété (1) admet G comme plus petit élément et $\mathbb{N} \times X$ comme plus grand élément. Ce fait est crucial car il assure que G est un graphe.

Montrons donc que G est un graphe dans $\mathbb{N} \times X$. Pour cela, on considère l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} ; \exists ! x \in X \mid (n, x) \in G\}.$$

Par définition, montrer que G est un graphe revient à montrer que $A = \mathbb{N}$. C'est ce que l'on fait maintenant, à l'aide du Théorème 1.1.

Montrons que $0 \in A$. Comme G vérifie (1), $(0, a) \in G$. Supposons, en outre, qu'il existe $b \in X$, avec $b \neq a$, tel que $(0, b) \in G$. Il est alors facile de voir, en utilisant l'axiome (A1), que $G \setminus \{(0, b)\}$ vérifie (1) et, bien-sûr, est strictement contenu dans G . Ceci est une contradiction. Ainsi, $0 \in A$.

Soit à présent $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \in A$. Par hypothèse, il existe un unique $x \in X$ tel que $(n, x) \in G$. Comme G vérifie (1), $(s(n), f(x)) \in G$. Supposons maintenant qu'il existe $y \in X$, $y \neq f(x)$, tel que $(s(n), y) \in G$.

Nous allons montrer que, sous couvert de l'existence d'un tel y , $G \setminus \{(s(n), y)\}$ vérifie (1).

Premièrement, comme G vérifie (1), il contient $(0, a)$ et, d'après l'axiome (A1), $0 \neq s(n)$ et donc $(0, a) \neq (s(n), y)$. Par suite, $(0, a) \in G \setminus \{(s(n), y)\}$.

Deuxièmement, considérons $(m, z) \in G \setminus \{(s(n), y)\}$ et montrons que $(s(m), f(z)) \in G \setminus \{(s(n), y)\}$. Comme $(m, z) \in G$, $(s(m), f(z)) \in G$. Il suffit donc de montrer que $(s(m), f(z)) \neq (s(n), y)$. Si l'on avait $(s(m), f(z)) = (s(n), y)$, il s'ensuivrait $f(z) = y \neq f(x)$ et $s(m) = s(n)$ et donc $m = n$ d'après l'axiome (A2). Mais, comme $(m, z) \in G$, on aurait $(n, z) \in G$ et, $n \in A$ imposerait $z = x$, et donc $f(z) = f(x)$, contredisant ce qui précède. On conclut donc que $(s(m), f(z)) \neq (s(n), y)$ et donc que $(s(m), f(z)) \in G \setminus \{(s(n), y)\}$. Ce qui établit que $G \setminus \{(s(n), y)\}$ vérifie (1). Or ceci est absurde par minimalité de G , comme on l'a vu ci-dessus.

Ainsi, l'hypothèse de l'existence d'un tel y conduit à une contradiction et, donc, est fausse. On a donc prouvé que l'unique $y \in X$ tel que $(s(n), y) \in G$ est $f(x)$. Autrement dit, $s(n) \in A$.

Il reste à appliquer le Théorème 1.1 pour conclure que $A = \mathbb{N}$. Comme indiqué ci-dessus, cela démontre que G est un graphe de $\mathbb{N} \times X$. Posant alors $u = (\mathbb{N}, X, G)$, on a bien $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ telle que $u(0) = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(s(n)) = f(u(n))$.

Il reste à montrer l'unicité de u . Pour cela, supposons qu'il existe une application $v : \mathbb{N} \rightarrow X$ telle que $v(0) = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(s(n)) = f(v(n))$. Il est facile de montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = v(n)$. Les détails sont laissés au lecteur. ■

Il est bien sûr légitime de se demander s'il peut exister plusieurs ensembles, très différents les uns des autres, satisfaisant les axiomes de Peano. Si tel était le cas, cela signifierait que ces trois axiomes, à eux seuls, ne suffisent pas à décrire l'ensemble des entiers naturels et, par conséquent, il faudrait ajouter d'autres axiomes pour bien distinguer l'ensemble qu'on cherche à construire.

En fait, il s'avère que ces trois axiomes suffisent bien à caractériser $\mathbb{N}$ au sens suivant. Si l'on considère un triplet (E, e, σ) où E est un ensemble, e un élément de E et $\sigma : E \rightarrow E$, et si l'on suppose que ce triplet vérifie les axiomes de Peano (convenablement retranscrits pour ce triplet), alors il existe une application bijective $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que $\alpha(0) = e$ et telle que $\alpha \circ s = \sigma \circ \alpha$. Cela signifie que E muni de son élément e et de son application σ se comporte exactement comme $\mathbb{N}$ muni de son élément 0 et de son application s .

Théorème 1.7 – Unicité de $\mathbb{N}$ – Soit (E, e, σ) où E est un ensemble, e un élément de E et $\sigma : E \rightarrow E$. On suppose que $e \notin \sigma(E)$, que σ est injective et que, pour tout sous-ensemble F de E , si $e \in F$ et $\sigma(F) \subseteq F$ alors $F = E$. Alors, il existe une application bijective $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que $\alpha(0) = e$ et telle que $\alpha \circ s = \sigma \circ \alpha$.

Démonstration : Les détails de la démonstration sont laissées en exercice. On pourra suivre le chemin suivant.

En premier lieu, le théorème 1.6 permet de construire une application α comme dans l'énoncé. En second lieu, on remarque que, le Théorème 1.6 ne reposant que sur les axiomes de Peano, il en existe une version pour le triplet (E, e, σ) . Cela permet de construire une application $\beta : E \rightarrow E$, analogue pour E de α et réciproque de celle-ci.

2 Opérations dans $\mathbb{N}$.

Dans cette section, on va montrer comment, à partir de la présentation axiomatique de $\mathbb{N}$, on peut reconstruire les opérations élémentaires dont on peut munir cet ensemble : l'addition et la multiplication.

On commence par définir l'addition de deux éléments de $\mathbb{N}$. Fixons un élément p de $\mathbb{N}$. On va définir l'opération "ajouter p " à un élément quelconque de $\mathbb{N}$.

Pour cela, l'outil essentiel sera le Théorème de Dedekind.

Lemme 2.1 – L'opération *ajouter* p – Soit p dans $\mathbb{N}$. Il existe une unique application

$$\sigma_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que $\sigma_p(0) = p$ et $\sigma_p \circ s = s \circ \sigma_p$.

Démonstration : C'est immédiat en appliquant le Théorème 1.6 avec $X = \mathbb{N}$, $f = s$ et $a = p$. ■

Remarque 2.2 – On commence par souligner quelques points importants.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Le Théorème 1.6 permet de montrer l'existence de l'application σ_p ci-dessus. Mais, il permet aussi de la caractériser. En effet, il affirme qu'il existe une *unique* application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $u(0) = p$ et $u \circ s = s \circ u$. Autrement dit, il existe une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et une seule, qui commute avec s et envoie 0 sur p , et c'est σ_p .
2. Ce qui précède assure en particulier que $\sigma_0 = \text{id}_{\mathbb{N}}$ et $\sigma_1 = s$. On note, au passage, que l'identité $\sigma_1 = s$ se réécrit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s(n) = n + 1$.

Pour préparer l'étude de l'opération d'addition, que l'on définira par la suite, commençons par un lemme très utile.

Lemme 2.3 –

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sigma_{s(p)} = s \circ \sigma_p$.
2. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n \circ \sigma_p = \sigma_p \circ \sigma_n$.