

Solution détaillée de l'ex. VI.8.073

On va faire beaucoup mieux que ce que demande l'énoncé. On va, en effet, démontrer ce qui suit :

Soit K un corps parmi $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit E un K -e.v. de dim. finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u: E \rightarrow E$ un endomorphisme.

On rappelle que u est un projecteur lorsque $u^2 = u$, une symétrie (au sens alg.) lorsque $u^2 = 1$. On rappelle aussi que u est une projection si il existe des sous-esp. F, G de E tq $E = F \oplus G$ et $u: E \rightarrow E$; on dit alors que u est

$$\begin{matrix} x & \longrightarrow & x_F \\ \text{"} & & \end{matrix}$$

$$x_F + x_G$$

la proj. sur F , parallèlement à G .

On rappelle enfin que u est une symétrie si il existe des sous-esp. F, G de E tq $E = F \oplus G$ et $u: E \rightarrow E$; on dit alors que

$$\begin{matrix} x & \longrightarrow & x_F - x_G \\ \text{"} & & \end{matrix}$$

$$x_F + x_G$$

u est la symétrie par rapp. à F , parall. à G .

On note enfin $\text{Spec}(u)$ l'ensemble des v.p. de u .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose qu'il existe des rev F, G de E tq $E = F \oplus G$ et que u ~~est~~ ^{soit} la proj. sur F , parall. à G .

Pour $x \in E$, on pose $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Par déf., on a donc $u(x) = x_F$.

Ainsi, $x \in \ker(u)$ si $x_F = 0$ si $x = x_G$ si $x \in G$. Et, $x \in \ker(u - \text{id})$ si $u(x) = x$ si $x_F = x$ si $x \in F$.

On a donc montré que $\ker(u - \text{id}) = F$ et $\ker(u) = G$, ce dont il découle que $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u)$. Ceci prouve (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Par hypothèse, $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u)$.

~~On peut alors montrer que~~

Soit alors $x \in E$. Il existe $y \in \ker(u - \text{id})$, $z \in \ker(u)$ tq $x = y + z$ et donc :

$$u(x) = u(y) + u(z) = y$$
$$u^2(x) = u(u(x)) = u(y) = u(x).$$

On a bien mq, $\forall x \in E$ $u^2(x) = u(x)$. Donc $u^2 = u$.

On va démontrer les deux résultats suivants.

Théo. (caract. des proj.). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est un projecteur;
- (ii) u est une proj. au sens géom.
- (iii) u est diag. et $\text{Spec}(u) \subseteq \{0, 1\}$.

Théo. (caract. des symétries). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est une symétrie au sens alg. ;
- (ii) u est une symétrie au sens géométrique ;
- (iii) u est diag. et $\text{Spec}(u) \subseteq \{-1, 1\}$.

Le cas des projections.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Par hypothèse, $u^2 = u$.

On observe que: $\forall x \in E, \quad x = x - u(x) + u(x)$

avec $x - u(x) \in \ker(u)$. Donc $E = \ker(u) + \text{Im}(u)$.

De plus, $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = 0$ car $u^2 = u$. On

a donc $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$. De plus, par

définition, u est la projection sur $\text{Im}(u)$,

parallèlement à $\ker(u)$ puisque, $\forall x \in E, \quad u(x) = u(x)$.

Le cas des symétries.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Par hypothèse, $u^2 = \text{id}$.

On observe que: $\forall x \in E$, $x = \frac{1}{2}(x+u(x)) + \frac{1}{2}(x-u(x))$

et que $u(x+u(x)) = u(x) + x$

et $u(x-u(x)) = u(x) - x = -(x-u(x))$.

Ceci montre que $E = \text{Ker}(u-\text{id}) \oplus \text{Ker}(u+\text{id})$

et, comme $\forall x \in E$, $u(x) = \frac{1}{2}(x+u(x)) - \frac{1}{2}(x-u(x))$,

u est la symétrie (au sens géom.) par rapp.

à $\text{Ker}(u-\text{id})$, parallèlement à $\text{Ker}(u+\text{id})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose qu'il existe des sous-ev. F, G de E

tg $E = F \oplus G$ et que u soit la sym. par

rapp. à F , parallèlement à G . Pour $x \in E$,

on pose $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Il est alors facile de voir que

$$x \in F \quad \text{si} \quad x = x_F \quad \text{si} \quad u(x) = x$$

$$x \in G \quad \text{si} \quad x = x_G \quad \text{si} \quad u(x) = -x$$

On a donc $F = \text{Ker}(u-\text{id})$, $G = \text{Ker}(u+\text{id})$

et $E = \text{Ker}(u-\text{id}) \oplus \text{Ker}(u+\text{id})$. Ceci assure

que (iii) est vraie.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Par hypothèse, on a que ~~Par hypothèse~~

$E = \text{Ker}(u-\text{id}) \oplus \text{Ker}(u+\text{id})$. Soit $x \in E$, il existe

$y, z \in E$ tg $u(y) = y$, $u(z) = -z$ et $x = y + z$.

On a donc $u(x) = u(y+z) = u(y) + u(z) = y - z$,

puis
$$\begin{aligned} u^2(x) &= u(u(x)) = u(y-z) = u(y) - u(z) \\ &= y - (-z) \\ &= y + z \\ &= x. \end{aligned}$$

On a donc mq, $\forall x \in E$, $u^2(x) = x$. Ceci prouve (i).

Commentaires et compléments :

1. La déf. géom. (de l'un des deux cas) n'exclut pas que F ou G soit $\{0\}$. Si c'est le cas, on aura une seule v.p. pour les proj. et la même chose pour les symétries.
2. Le ~~fait~~ fait que E soit de dimension finie n'a été utilisé nulle part. Les deux théorèmes restent donc vrais en dimension infinie.
3. On a supposé que $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour simplifier. En fait, le théo. sur les proj. reste vrai sur tout corps. En revanche :
 - le théo. sur les sym. reste vrai pour tout corps de caractéristique diff. de 2 (car $\frac{1}{2}$ apparaît dans les calculs).
 - Notons que, si le corps est de caract. 2, alors $2=0$, c'est-à-dire que $1=-1$ et la seule sym. au sens géom. est id. Dans ce cas, on a $(iii) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (i)$, mais la dernière implication n'est pas une équivalence.