7 mars 2022

Catégorification d'algèbres KLR

<u>Réf</u> : Benjamin Dupont, "Rewriting modulo isotopies in Khovanov-Lauda-Rouquier's categorification of quantum groups" (arXiv 2019, Advances 2021)

Aaron Lauda, "An introduction to diagrammatic algebra and categorified quantum sl_2" (106 pages) 2012

<u>But</u> : Comprendre la 2-catégorie de KLR, qui va être la catégorification d'un groupe quantique associé à une algèbre de Kac-Moody (+ hypothèses)

$$\text{"données combinatoires"} \rightsquigarrow \mathfrak{g} \text{ Kac-Moody} \rightsquigarrow \underset{(\Bbbk\text{-algèbre})}{U_q(\mathfrak{g})} \qquad \underset{(2\text{-cat})}{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$$

décatégorification

Khovanov-Lauda et Rouquier ont défini des 2-catégories $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ (en fait isomorphes, cf. Brundan)

<u>Conj</u> : Si "le calcul diagramatique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est non-dégénéré", alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une catégorification de $U_q(\mathfrak{g})$ (ie $K_0\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \simeq U_q(\mathfrak{g})$)

Idée (exposé 2) : Preuve de <u>réécriture catégorique</u> que le calcul diag. est non-dégénérée ↳ avec subtilité "modulo isotopies"

Motivation détaillée dans [Lauda]

alg assoc. unitaire

$U_q(\mathfrak{g})$ On veut comprendre les modules qui ont une décomposition en poids

On remplace l'unité par une famille d'idempotents orthogonaux 2 à 2.

Pour $\mathfrak{g} = sl_2$, on prend $\{1_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

et on construit $\dot{U} = \{{}_m\dot{U}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{1_m \underset{U_q(\mathfrak{g})}{\overset{\in}{u}} 1_n\}_{m\in\mathbb{Z}}$

On peut y penser comme une 1-catégorie $\dot{U}$: obj : $\mathbb{Z}$

$\dot{U}(m,n) = {}_m\dot{U}_n$

<u>Prop</u> $\dot{U}$-modules $\simeq$ U-modules qui ont une décomposition en poids.

I Données combinatoires

Déf (matrice de Cartan)

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ tq $\forall i, a_{ii} = 2$

$\forall i<j, \ a_{ij} \in \mathbb{Z}$

$\forall i,j, \ a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$

Une réalisation d'une telle matrice est un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$
où $\mathfrak{h}$ $\mathbb{K}$-ev, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ (racines)
$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ (coracines)

tq $\begin{cases} \Pi \text{ et } \Pi^\vee \text{ familles libres} \\ \forall i,j \ \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij} \\ \dim \mathfrak{h} = 2n - \text{rang } A. \end{cases}$

À partir de A et d'une réalisation, on peut construire une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$.
On s'intéresse aux $\mathfrak{g}(A)$-modules qui ont une décomposition en poids
$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ où $V_\lambda = \{v \in V ; h(v) = \langle \lambda, h \rangle v$ pour $h \in \mathfrak{h}\}$

Déf : Donnée de Cartan $(I, \cdot)$ où I ensemble fini
et $\cdot$ forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$

tq $i \cdot i \in \{2; 4; 6; \dots\}$ $\forall i \in I$

et $-d_{ij} = 2\frac{i \cdot j}{i \cdot i} \in \{0, -1, -2, \dots\}$ $\forall i \neq j$

Elle est dite simplement lacée si $i \cdot i = 2$ et $i \cdot j \in \{0, -1\}$

Rem : 1) Si on choisit $a_{ij} = 2\frac{i \cdot j}{i \cdot i}$, on obtient une matrice de Cartan.

2) Pour Γ graphe non orienté, fini (I = ensemble fini des sommets), sans arête multiple ni boucle, on peut définir $i \cdot i = 2$

$i \cdot j = \begin{cases} -1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ reliés par une arête} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

On a une bijection : $\{$graphe avec ces conditions$\} \longleftrightarrow \{$donnée de Cartan simplement lacée$\}$

À une donnée de Cartan, on peut associer "une donnée de racines"

- X et Y groupes abéliens finiment engendrés avec une forme $Y \times X \to \mathbb{Z}$ ("perfect pairing", càd $Y \simeq X^*$, plus fort que non-dégénérée)
- injections $I \hookrightarrow X$ et $I \hookrightarrow Y$ tq $\langle i, j_X \rangle = -d_{ij}$
$\quad i \mapsto i_X \qquad i \mapsto i$
(généralisation de $\mathbb{Z}[I] \times \mathbb{Z}[I] \to \mathbb{Z}$)

À ceci on associe un groupe quantique U_q, càd une $\mathbb{Q}(q)$-algèbre associative unitaire engendrée par E_i, F_i, K_μ pour $i \in I$, $\mu \in Y$, avec relations (généralisant ce qu'on a pour sl_2)

<u>Ex pour sl_2</u> : $I = \{*\}$ $\quad E, F$
$Y = \mathbb{Z}$ et les K_n $(n \in \mathbb{Z})$ sont reliés de telle sorte qu'il reste K et son inverse K^{-1}
avec les relations : $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$

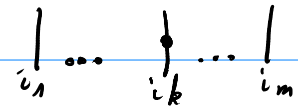
$$KE = q^2 EK \quad \text{et} \quad KF = q^{-2} FK$$

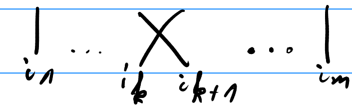
$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

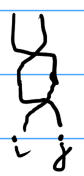
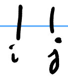
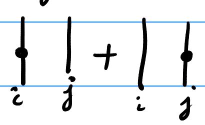
II Algèbres KLR

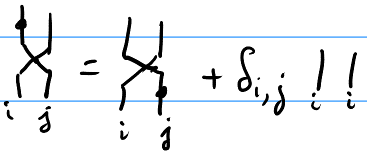
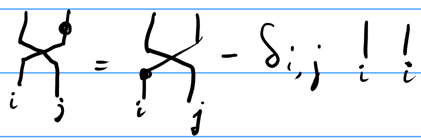
On se fixe une donnée de Cartan $(I, \cdot)$ simplement lacée.

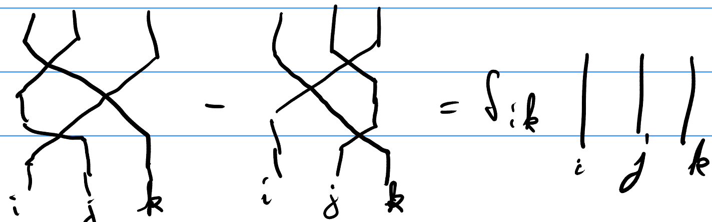
<u>Déf</u> On considère $\mathbb{N}[I]$
Un élément dedans sera noté ν (p. ex $3i + j$). On note $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i\, i$
$\mathrm{Seq}(\nu) = \{$ suite où chaque $i \in I$ apparait ν_i fois $\}$
$(\mathrm{Seq}(3i+j) = \{iiij, iiji, ijii, jiii\}$
On notera $\underline{i}$ une telle suite.

<u>Déf</u> Pour un ν fixé, on définit une algèbre par générateurs $\forall\, \underline{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}\,\nu$ $\quad x_{k, \underline{i}} =$ 

et $\quad \tau_{k, \underline{i}} =$ 

relations (locales) :  $=$
- 0 si $i = j$
-  si $i \cdot j = 0$
-  si $i \cdot j = -1$ (càd i et j reliés par une arête)

 et 

 si $i \cdot j = -1$

<u>Rem</u> : Si pas simplement lacé, il y a des termes supplémentaires

Notation $R(\nu)$

On peut lire les diagrammes de bas en haut, et indiquer les brins en haut.

On décompose $R(\nu) = \bigoplus_{\underline{i},\underline{j}\in Seq(\nu)} {}_{\underline{j}}R(\nu)_{\underline{i}}$ ($\underline{i}$ entrée, $\underline{j}$ en sortie)

Le produit dans $R(\nu)$ donne une "composition" ${}_{\underline{k}}R(\nu)_{\underline{j}} \otimes {}_{\underline{j}}R(\nu)_{\underline{i}} \to {}_{\underline{k}}R(\nu)_{\underline{i}}$

Ceci motive à comprendre ces ${}_{\underline{j}}R(\nu)_{\underline{i}}$ comme des espaces de morphismes.

But : Associer à $R(\nu)$ une 2-catégorie.

III 2-catégories (linéaires)

Déf : Une 2catégorie est la donnée de:

catégorie "usuelle"
- objets "0-cellules" $\mathcal{C}_0$ = ensemble d'objets
- morphismes "1-cellules" $\forall u,v \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1(u,v)$ ensemble de morphismes, avec 1_u
- composition de morphismes $\star_0 : \mathcal{C}_1(v,w)\times\mathcal{C}_1(u,v) \to \mathcal{C}_1(u,w)$

$$g \qquad f \qquad g\circ f$$
$$v \xrightarrow{g} w \qquad u \xrightarrow{f} v \qquad u \xrightarrow{f} v \xrightarrow{g} w$$

2-cellules = "morphismes entre morphismes"

Pour $u,v \in \mathcal{C}_0$, pour $f,g \in \mathcal{C}_1(u,v)$, on a un $\boxed{\text{ensemble}}$ $\mathcal{C}_2(f,g) \ni \alpha$ (avec $1_f \in \mathcal{C}_2(f,f)$)

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left=60, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=H}] \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"] & v \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] \arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\alpha\star_1\beta"] & \bullet \end{tikzcd}$$

avec une $\boxed{\text{composition } \star_1}$: $\mathcal{C}_2(g,h)\times\mathcal{C}_2(f,g)\to\mathcal{C}_2(f,h)$

tq 1_u et 1_f sont des unités, $\star_0$ et $\star_1$ sont associatives,

et la relation d'échange

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left=60, "f_0"{name=F0}] \arrow[r, "f_1"{name=F1}] \arrow[r, bend right=60, "f_2"'{name=F2}] \arrow[from=F0, to=F1, Rightarrow, "\alpha_1"'] \arrow[from=F1, to=F2, Rightarrow, "\alpha_2"'] & v \arrow[r, bend left=60, "g_0"{name=G0}] \arrow[r, "g_1"{name=G1}] \arrow[r, bend right=60, "g_2"'{name=G2}] \arrow[from=G0, to=G1, Rightarrow, "\beta_1"'] \arrow[from=G1, to=G2, Rightarrow, "\beta_2"'] & w \end{tikzcd}$$

$$(\alpha_1 \star_1 \alpha_2) \star_0 (\beta_1 \star_1 \beta_2) = (\alpha_1 \star_0 \beta_1) \star_1 (\alpha_2 \star_0 \beta_2)$$

Oubli : Sur les 2-cellules, on a une composition $\star_0$:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left=50, ""{name=A}] \arrow[r, bend right=50, ""'{name=B}] \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\alpha"] & v \arrow[r, bend left=50, ""{name=C}] \arrow[r, bend right=50, ""'{name=D}] \arrow[from=C, to=D, Rightarrow, "\beta"] & w \end{tikzcd}$$

donne

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left=50, ""{name=A}] \arrow[r, bend right=50, ""'{name=B}] \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\alpha\star_0\beta"] & w \end{tikzcd}$$

2-catégorie linéaire : On ajoute dans la donnée une structure d'ev pour les 2-cellules et on demande la bilinéarité de la composition.

$\{R(\nu)\}_{\nu\in Seq(I)}$ va être vu comme une 2-catégorie.

On définit :

0-cellule unique (notée $*$)

Les 1-cellules génératrices sont les éléments de I, et la composition $*_0$ de ces 1-cellules est la concaténation (l'ensemble des 1-cellules sont l'ensemble des suites d'éléments de I)

Les 2-cellules génératrices sont : $i *_0 j \to j *_0 i$ et : $i \to i$

($*_0$ est toujours la concaténation, $*_1$ est la composition verticale)

On impose comme relations celles de $R(\nu)$.

"intermédiaire avant le $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (2-catégorie de KLR)"

IV La 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

On part d'une donnée de Cartan $\mathfrak{h}$, $\{\alpha_i \in \mathfrak{h}^*\}$, $\{\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}\}$ tq $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$

<u>Notation</u> $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \ \forall i\}$ les poids

KLR définissent (2 variantes, isomorphes)

2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

- obj : éléments de P
- 1-cellule : engendré par $E_i 1_\lambda : \lambda \to \lambda + \alpha_i$ (où $\lambda \in P$ et α_i racines)

  $F_i 1_\lambda : \lambda \to \lambda - \alpha_i$
- 2-cellule générateurs :
  - $x : E_i 1_\lambda \to E_i 1_\lambda$ représentée par
  - $\tau : E_i E_j 1_\lambda \to E_j E_i 1_\lambda$
  - $\eta : 1_\lambda \to F_i E_i 1_\lambda$ et $\epsilon : E_i F_i 1_\lambda \to 1_\lambda$ représentées par et
- Relations : $-$ $= \dots$ $= \dots$ tresse

  $=$ et $=$

  (+ autres relations sur)

<u>Th</u> $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ catégorifie $U_q(\mathfrak{g})$