Correction exercice 4.3 Soit $n \geq 3$.

La matrice A, de taille $n \times n$, s'écrit ainsi : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice est clairement de rang 2, donc son noyau est de dim $n-2$, càd 0 est valeur propre de multiplicité géométrique $n-2$ (et donc sa mult. alg. est $\geq n-2$).
Il y a donc au plus 2 autres valeurs propres, disons λ et μ.
Pour rappel, $\operatorname{tr} A = \sum v.p. = \lambda + \mu$. et $\operatorname{tr}(A^2) = \sum (v.p)^2 = \lambda^2 + \mu^2$.
Or $\operatorname{tr} A = 2$.

et $A^2 = \begin{pmatrix} n & & ? \\ & 2 & \vdots \\ ? & & \ddots & \\ \vdots & & & 2 \\ & & & & n \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{tr} A^2 = (n-2)2 + 2n = 4n-4$.

(inutile de calculer les autres coefficients)

D'où on résout $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 4n-4 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} \mu = \lambda - 2 \\ \lambda^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4n-4 \end{cases}$

La seconde équation est $\lambda^2 - 2\lambda - 2n + 4 = 0$, qui possède bien 2 solutions distinctes, qui sont en fait λ et μ (en effet μ vérifie la même équation).
Donc A a comme v.p 0 de mult géom $n-2$, λ et μ, donc est diagonalisable.