Résolution numérique d'équations non linéaires – Exercices

1 Racine carrée

Soit $a > 1$. On souhaite évaluer précisément $\sqrt{a}$.

1) On souhaite utiliser une méthode de point fixe. Peut-on utiliser les itérations $x_{n+1} = g(x_n)$ de la fonction $g : x \mapsto x^2 - a + x$?

2) Pour quelles valeurs de α peut-on utiliser la fonction de point fixe $g : x \mapsto \alpha(x^2 - a) + x$? Quel serait le meilleur choix ? Proposer un choix simple de α.

3) Prenons le cas particulier de $\sqrt{5}$, et $\alpha = 1/5$. Combien d'itérations peut-on approximativement s'attendre à devoir calculer pour obtenir une précision de 10^{-12} ? Vérifier en pratique (en partant de $x_0 = 1$ par exemple).

4) Pour améliorer la méthode, on cherche à faire évoluer la valeur de α au fil des itérations pour la rapprocher de sa valeur optimale. Par quelle valeur α_n peut-on approcher la valeur optimale à partir de x_n ? Expliciter le schéma numérique proposé. Pour $a = 5$, observer numériquement sa convergence (en partant de $x_0 = 1$ par exemple).

5) Expliciter la méthode de Newton pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$. Commenter. Pour $a = 5$, comparer (expérimentalement) le nombre d'itérations pour obtenir la précision précédente.

2 Critères d'arrêt

Pour estimer une solution s de $f(x) = 0$ à l'aide d'une suite $(x_n)_n$ convergeant vers s, on ne dispose pas toujours de bornes sur l'erreur $e_n = |x_n - s|$ (on a une borne pour la dichotomie, mais pas pour les méthode de point fixe ou de Newton). On fait alors appel à l'un des deux critères suivants : étant donnée une tolérance ε,

— arrêt par contrôle du **résidu** : on arrête l'itération dès que $|f(x_n)| < \varepsilon$

— arrêt par contrôle de l'**incrément** : on arrête l'itération dès que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

(de plus, on arrête aussi au-delà d'un nombre maximal d'itérations : dès que $n > n_{\max}$, pour se prémunir contre les situations où la suite diverge, ou converge très lentement : il y a alors échec de l'estimation)
Remarquons que pour la méthode de point fixe avec $g(x) = \alpha f(x) + x$, les deux critères coïncident (à un facteur près) :

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - x_n| = \alpha |f(x_n)|.$$

6) Si $f'(s) = 0$, le contrôle du résidu assure-t-il un bon contrôle de l'erreur ? Si $f'(s) = \infty$, quel problème peut-il survenir avec le contrôle du résidu ? Si $0 < |f'(s)| < \infty$, justifier que contrôler le résidu revient à contrôler l'erreur, à un facteur près.

7) La convergence $x_{n+1} - x_n \to 0$ implique-t-elle que $(x_n)_n$ converge ?

Notons que pour la méthode de point fixe avec $g'(s) \neq 0$, on sait que la convergence est géométrique : $x_{n+1} - s \sim \kappa(x_n - s)$ où $\kappa = g'(s) \in]-1,1[$, et dans ce cas $x_{n+1} - x_n \sim (\kappa - 1)e_n$ donc le contrôle de l'incrément revient (à un facteur près) au contrôle de l'erreur.

3 Méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, admettant un zéro $s \in I$. On s'intéresse à la méthode de Newton $(x_n)_n$ à partir d'un point x_0.
On a prouvé la convergence quadratique de la méthode de Newton dans le cas où $f'(s) \neq 0$.

8) On suppose $f'(s) \neq 0$ et $f''(s) \neq 0$. Rappeler comment on obtient un équivalent de $x_{n+1} - s$ en fonction de $x_n - s$. Indication : écrire $x_{n+1} - s = g(x_n) - g(s) = \int_s^{x_n} g'(u)du$ où $g(x) = \cdots$ et utiliser un équivalent de $g'(u)$ pour u au voisinage de s.

9) Considérons $f(x) = x^2$, qui a pour zéro 0. Que donne la méthode de Newton dans ce cas ?

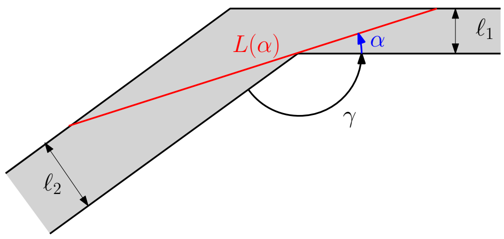
10) On suppose que $f'(s) = 0$ et $f''(s) \neq 0$. Que donne la preuve précédente ? Que dire de la vitesse de convergence dans ce cas ?

11) On suppose $f'(s) = 0$ et $f''(s) \neq 0$. Montrer que la suite $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quant à elle quadratiquement vers s, lorsque x_0 est suffisamment proche de s.

12) Prouver que si f est convexe sur $[s,b]$ (c'est-à-dire que le graphe de f est au-dessus de ses tangentes : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tous a,x), et strictement positive sur $]s,b]$, alors dès lors que $x_0 \in [s,b]$ la suite de la méthode de Newton issue de x_0 décroît vers s.

4 Problème non-linéaire : couloir coudé et optimisation

On veut faire passer un grand tableau dans un couloir qui a la forme donnée par la figure ci-dessous : le couloir est coudé selon un angle γ, et a des largeurs ℓ_1 et ℓ_2 avant et après le coude.



Quelle est la longueur maximale L^* d'un tableau pouvant passer le coude en glissant le long des murs ?

13) Pour chaque angle $\alpha \in [0,\pi-\gamma]$, justifier que la longueur maximale $L(\alpha)$ d'un tableau tenant dans le couloir selon un angle α (cf. figure) est

$$L(\alpha) = \frac{\ell_1}{\sin(\alpha)} + \frac{\ell_2}{\sin(\pi-\gamma-\alpha)}.$$

14) La réponse est donc donnée par le minimum de la fonction L. Pour $\ell_1 = 1\,\text{m}$, $\ell_2 = 1{,}5\,\text{m}$ et $\gamma = 120°$, représenter le graphe de L. À l'aide de la méthode de Newton, donner une approximation de la longueur maximale admissible. Est-ce qu'un tableau de $5\,\text{m}$ de long pourrait passer ? *Il s'agit donc de résoudre $L'(\alpha) = 0$ et d'évaluer $L(\alpha)$ en la solution.*

5 Problème non-linéaire : taux d'intérêt moyen équivalent

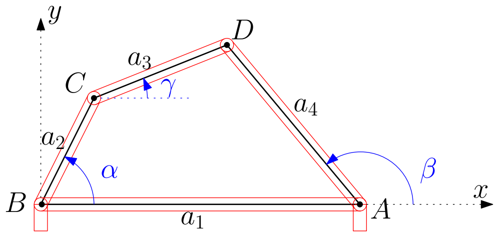
Un épargnant investit chaque année m euros, et obtient, après n années, un capital de M euros. Pour comparer cet investissement à un placement à taux fixe, on souhaite calculer le taux d'intérêt équivalent.

15) On note r le taux d'intérêt (par exemple, $r = 2\,\%$). En plaçant chaque année une somme m sur un compte rémunéré au taux r, de quel capital dispose-t-on après n années ?

16) On suppose que $m = 1000$ €, $n = 5$ et $M = 6000$ €. Estimer le taux r équivalent, en utilisant la méthode de Newton.

6 Problème non-linéaire : position d'un système mécanique

Un système formé de quatre barres rigides articulées entre elles est figuré ci-dessous.



Si on impose l'angle β, alors le système se déforme et définit l'angle α (et γ). En autorisant les angles α négatifs, on devine qu'il peut y avoir plusieurs solutions. Selon les longueurs a_1,a_2,a_3,a_4, tous les angles β ne sont pas réalisables. Par exemple, $\beta = 0$ n'est possible que si $a_1 + a_4 < a_2 + a_3$.

17) En exprimant l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ en coordonnées, écrire deux équations reliant α,β,γ. En exprimant $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, obtenir une relation entre α et β. En utilisant une identité pour $\cos(\alpha - \beta)$, vérifier que :

$$\frac{a_1}{a_2}\cos\beta - \frac{a_1}{a_4}\cos\alpha - \cos(\alpha-\beta) + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{2a_2a_4} = 0.$$

18) On prend $a_1 = 10\,\text{cm}$, $a_2 = 13\,\text{cm}$, $a_3 = 8\,\text{cm}$, $a_4 = 10\,\text{cm}$. Pour chaque valeur de β entre 0 et π (on prendra par exemple 20 valeurs), utiliser la méthode de Newton pour estimer α. On partira de $x_0 = 2\pi/3$ et de $x_0 = -1$ pour tenter de chercher deux solutions différentes, que l'on stockera dans deux vecteurs `va1` et `va2` ; lorsque la méthode de Newton échoue, on posera `va1(i)=NaN` ("not a number"). Représenter graphiquement `va1` et `va2` en fonction de β sur le même graphe (les points `NaN` ne seront pas représentés).