Introduction aux probabilités : Travaux dirigés

Rémi Peyre et Laurent Tournier

Automne 2010

Voici les énoncés des exercices que nous avons donnés en travaux dirigés dans le cadre du cours « Introduction aux probabilités » de Guillaume Aubrun pour les élèves de L3 de l'ÉNS Lyon au premier trimestre de l'année universitaire 2010/11.

À l'intérieur de chaque feuille, les exercices sont grossièrement rangés par difficulté croissante. Les questions les plus délicates sont indiquées par une étoile (★). Les questions marquées de deux étoiles (★★) sont des questions très difficiles, qui n'ont pas été traitées en TD mais que nous mentionnons néanmoins pour leur intérêt culturel.

Feuille 1 : Échauffement

8 novembre 2010

Exercice 1. *Nombres de Catalan*

On appelle *bon parenthésage de longueur* $2n$ une suite de $2n$ symboles '(' ou ')' satisfaisant les conditions de compatibilité suivantes : la suite contient exactement n symboles de chaque sorte et, pour $k = 1, \dots, 2n-1$, parmi les k premiers symboles de la suite il y a au moins autant de '(' que de ')'. On note C_n le nombre de bons parenthésages de longueur $2n$.

1. (★) Montrer que pour tout n, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Indication : *Trouver une relation de récurrence sur la suite $(C_n)_n$, et l'utiliser pour obtenir une expression de la série génératrice $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.*

2. Donner un équivalent asymptotique, quand $n \to \infty$, de la probabilité qu'une suite aléatoire choisie uniformément parmi les suites de $2n$ symboles '(' ou ')' soit un bon parenthésage.

Exercice 2. *Formule d'inclusion-exclusion*

1. Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E. Démontrer la formule suivante, dite d'inclusion-exclusion (ou du crible) :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

2. Montrer de plus que les sommes partielles indexées par $k \in \{1\}$, $k \in \{1,2\}$,..., $k \in \{1, \dots, n\}$ majorent et minorent alternativement le membre de gauche.

3. Un secrétaire vient de mettre cent lettres dans des enveloppes comportant des adresses avant de se rendre compte que les lettres étaient nominatives. Quelle est la probabilité que pas une seule des lettres ne soit dans la bonne enveloppe ? En donner une valeur approchée.

Exercice 3. *Boîtes et enveloppes*

1. De combien de façons peut-on répartir k enveloppes distinguables dans n boîtes numérotées ?

2. (★) Qu'en est-il si on impose qu'il y ait au moins une enveloppe par boîte ?

3. (★) Reprendre les deux questions précédentes en considérant les enveloppes indistinguables.

4. En déduire les nombres de suites croissantes et de suites strictement croissantes de longueur n formées d'éléments de $\{1, \dots, k\}$.

Exercice 4. *Retour en Terminale*

On tire au hasard une main de 8 cartes dans un jeu de 32. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. La main est constituée par les huit carreaux ;

2. La main contient les quatre valets ;

3. La main contient (au moins) un carré ;

4. La main contient (au moins) trois cartes de même hauteur.

Exercice 5. *Paradoxe des anniversaires*

Question. Quelle est la probabilité que, dans un groupe de 25 personnes, deux (au moins) aient leur anniversaire le même jour ? (On négligera les années bissextiles). En donner une valeur approchée.

Exercice 6. *Probabilités et intuition*

1. Hier, les numéros tirés au loto ont été 1, 2, 3, 4 et 5 (parmi 49 boules). Déjà peu banal, ce tirage a encore moins de chance de se reproduire la prochaine fois et il vaudra donc mieux ne pas jouer 1, 2, 3, 4, 5. Qu'en pensez-vous ?

2. En Inde, un député (hypothétique) propose, afin de contrôler la démographie tout en comblant le déficit de filles, d'autoriser les familles à avoir autant de filles que la nature veut bien leur en donner avant la naissance éventuelle de leur premier garçon, qui est alors leur dernier enfant. À quel point cette politique augmenterait-elle la proportion de filles parmi les naissances ?

3. Dans un jeu, dix personnes $P_1, \ldots, P_{10}$ tirent l'une après l'autre un billet dans un sac opaque qui en contient vingt de 1 dollar et un de 100 dollars, et le gardent. Après chaque tirage, la probabilité que le billet de 100 dollars soit encore dans le sac diminue ; pour éviter ce désavantage, P_{10} propose à P_1 de lui donner 1 dollar pour pouvoir tirer en premier, P_1 tirant alors en dernier. P_1 doit-il accepter ?

4. Prenez un jeu ordinaire de 52 cartes, bien battu. Vous retournez les cartes une à une, face visible. Durant cette procédure vous devez, à un moment de votre choix, parier que la prochaine carte retournée sera rouge ; au pire, il s'agit de la dernière (et on n'a même pas besoin de la retourner pour savoir si le pari est remporté). Si vous décidez à l'avance de parier sur la dixième, par exemple, la probabilité de gagner est de 50 %. Mais comment optimiser cette probabilité par un choix de carte prenant en compte la connaissance des cartes précédentes ?

5. Les cent passagers d'un vol en avion — toutes les places ont été réservées — s'apprêtent à embarquer. Le premier à monter dans l'avion, un brin étourdi, s'assied au hasard. Les suivants s'installent ensuite à la place prévue par leur billet, à moins que celle-ci ne soit déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager à entrer trouve sa place libre ?

Feuille 2 : Probabilité conditionnelle

15 novembre 2010

Exercice 1. *Paradoxe de Simpson*

Soient $(B_i)_{i\in I}$ et $(B'_i)_{i\in I}$ deux partitions de l'univers Ω. Soient A et A' deux événements.

1. Si pour tout i, $\mathbf{P}(A'|B_i) \geqslant \mathbf{P}(A|B_i)$, en déduire que $\mathbf{P}(A') \geqslant \mathbf{P}(A)$.

2. Si pour tout i, $\mathbf{P}(A'|B'_i) \geqslant \mathbf{P}(A|B_i)$, la conclusion précédente tient-elle encore ?

3. Lors d'un débat politique, deux personnalités s'affrontent sur l'évolution du niveau des lycéens entre 2007 et 2010. A, qui représente la majorité, affirme que la proportion de lauréats a augmenté dans chaque filière. B, de l'opposition, affirme que la proportion globale de lauréats a baissé. Le spectateur peut-il en déduire qu'un des deux ment ? Si non, essayer de donner un contre-exemple réaliste.

Exercice 2. *Problème de Monty Hall*

Au cours d'un jeu télévisé, on présente trois boîtes fermées à un candidat. L'une d'elles contient 10 000 euros, et seul le présentateur sait laquelle. Le candidat choisit une boîte mais, avant qu'il ait pu l'ouvrir, le présentateur l'interrompt, et ouvre l'une des deux autres boîtes, qu'il sait vide (le jeu se déroule toujours ainsi). Le candidat peut alors maintenir son choix, ou ouvrir la boîte restante.

Question. L'une de ces options est-elle meilleure que l'autre ?

Exercice 3. *Les enfants de ma voisine*

Hier, je discutais avec ma nouvelle voisine :

MOI – Combien avez-vous d'enfants ?
ELLE – Deux.
MOI – Y a-t-il une fille parmi eux ?
ELLE – Oui.
MOI – Et l'autre enfant, est-ce une fille également ?

1. Quelle est la probabilité que ma voisine réponde « oui » ?

2. Même question, sauf qu'à la troisième réplique j'ai demandé si l'aîné était une fille.

3. (★) Même question, sauf qu'à la troisième réplique j'ai demandé si un des enfants s'appelait Mathilde.

4. (★) Dans le(s) cas où la réponse n'est pas $1/2$, expliquer heuristiquement d'où vient le paradoxe, et en particulier pourquoi on pouvait prévoir que la vraie valeur serait plus petite ou plus grande que $1/2$.

Exercice 4. *Dix petits nègres*

Dans une île du Devon occupée par $(n+2)$ personnes, un meurtre est commis. *A priori*, les $(n+1)$ suspects ont tous la même probabilité d'être coupables. Toutefois, l'enquête de la police permet de déterminer que le meurtrier est de groupe sanguin AB, une propriété partagée par une fraction p de la population anglaise.

On décide de procéder à l'analyse des groupes sanguins des suspects. La première personne analysée, Wargrave, est précisément de groupe AB. Malheureusement, à peine cette première analyse terminée, une fausse manœuvre détruit l'analyseur, de sorte que les groupes sanguins des n autres suspects restent inconnus. On se demande alors : quelle est la probabilité x que Wargrave soit l'assassin ?

Deux statisticiens confrontent leurs points de vue. D'après A :

> Parmi les n suspects non analysés, le nombre d'individus de groupe AB est distribué selon la binomiale $\mathcal{B}_n(p)$. Si k suspects non analysés sont de groupe AB, la probabilité que Wargrave soit coupable vaut $1/(k+1)$, de sorte que
>
> $$x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{k+1}.$$

B, lui, utilise un raisonnement différent :

> Notons M l'événement « Wargrave est le meurtrier », $\overline{M}$ son complémentaire, et AB l'événement « Wargrave est de groupe AB ». Alors on a $\mathbf{P}(M) = 1/(n+1)$, $\mathbf{P}(AB|M) = 1$, $\mathbf{P}(AB|\overline{M}) = p$, et $x = \mathbf{P}(M|AB)$, de sorte qu'on devrait pouvoir conclure par la formule de Bayes.

1. **(★)** Simplifier l'expression donnée par A. Application numérique pour $n = 8$ et $p = 0{,}04$.

2. Appliquer la formule de Bayes dans le raisonnement de B. Application numérique pour les mêmes valeurs que précédemment. Constater que les valeurs trouvées par les deux méthodes diffèrent.

3. **(★)** Qui a tort, et pourquoi ?

Exercice 5. *Absence de mémoire de la loi géométrique*

Question. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que X suit une loi géométrique si, et seulement si, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X > m+n | X > m) = \mathbf{P}(X > n).$$

Expliquer pourquoi on dit que les lois géométriques modélisent la durée de vie de machines « sans usure ».

Exercice 6. *Intransitivité des corrélations*

1. Pour deux événements A et B de probabilités non triviales, montrer que le signe de $\mathbf{P}(A|B) - \mathbf{P}(A)$ est le même que celui de $\mathbf{P}(B|A) - \mathbf{P}(B)$, et que ce signe est nul si et seulement si A et B sont indépendants. Selon le cas, on dira que A et B sont *positivement* ou *négativement* corrélés.

2. ($\star$) Construire trois événements A, B et C sur un même espace de probabilités tels que A et B soient (strictement) positivement corrélés, B et C soient (strictement) positivement corrélés, mais que A et C soient (strictement) négativement corrélés.

Feuille 3 : Indépendance – Lois classiques

15 novembre 2010

Exercice 1. *Indépendance et passage au complémentaire*

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants.

1. Montrer que $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants aussi.

2. En déduire la propriété plus générale : si $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}$,..., $B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.

3. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si, et seulement si les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ le sont.

Exercice 2. *Compléments sur l'indépendance*

1. Soient $X_j, j \in J$, des variables aléatoires indépendantes. Pour tout $j \in J$, notons $\mathcal{X}_j$ l'ensemble des valeurs prises par X_j, et soit f_j une fonction arbitraire de $\mathcal{X}_j$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les variables aléatoires $\big(f_j(X_j)\big)_{j \in J}$ sont indépendantes.

2. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes et $J_1, \ldots, J_k$ sont des parties disjointes de I, montrer que les variables aléatoires $\overrightarrow{X}_{J_1}, \ldots, \overrightarrow{X}_{J_k}$ sont indépendantes, où $\overrightarrow{X}_J$ désigne la variable aléatoire vectorielle $(X_i)_{i \in J}$.

3. Réciproquement, étant donnée une famille finie de variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ et une partition $I = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_k$, montrer que si les variables aléatoires vectorielles $\overrightarrow{X}_{J_1}, \ldots, \overrightarrow{X}_{J_k}$ sont indépendantes et si pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$ les variables aléatoires $X_i, i \in J_l$, sont indépendantes, alors les variables aléatoires $X_i, i \in I$, sont indépendantes.

4. ($\star$) Pour $n \geqslant 3$, trouver des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ non indépendantes telles que $(n-1)$ quelconques d'entre elles soient néanmoins toujours indépendantes.
Indication : *On pourra considérer des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{n-1}$ indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et définir X_n à partir de celles-ci.*

Exercice 3. *Calculs sur des lois sur $\mathbb{N}$*

1. Soit $p_X, p_Y \in (0,1)$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_X et p_Y. Calculer $\mathbf{P}(X > Y)$.

2. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois géométriques de paramètres respectifs p_X et p_Y. Déterminer la loi de $Z := \min(X, Y)$.
Indication : *On pourra commencer par calculer $\mathbf{P}(Z > n)$.*

3. Retrouver ce dernier résultat à l'aide de l'interprétation des lois géométriques en termes de lancers d'une pièce biaisée.

4. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $(X + Y)$.

5. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois géométriques de même paramètre p. Déterminer la loi de $X + Y$.

6. Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m, p) et (n, p).

7. Retrouver ce dernier résultat, de même que l'espérance et la variance des lois binomiales, à partir de leur interprétation en termes de lancers d'une pièce biaisée.

8. On tire une variable aléatoire X distribuée selon la loi binomiale de paramètres (n, p), puis on tire Y selon la loi binomiale de paramètres (X, q) (conditionnellement à X s'entend). Quelle est la loi de Y ? La retrouver via l'interprétation précédente.

Exercice 4. *Recensement des écureuils*

On veut estimer le nombre N d'écureuils dans une forêt. Pour cela on en capture k, on leur met une petite marque sur la patte et on les relâche. Une semaine après (on suppose qu'aucun écureuil n'est mort ou né dans l'intervalle) on en capture ℓ et on compte ceux d'entre eux qui portent la marque.

1. Calculer la probabilité $p(m)$ qu'on trouve m écureuils marqués en fonction de N, k et ℓ. La loi $(p(m))_{m\in\mathbb{N}}$ est appelée ***loi hypergéométrique*** de paramètres N, k et ℓ.

2. Calculer la valeur de N pour laquelle la probabilité d'observer une valeur m donnée est maximale.

Exercice 5. *Entropie*

Pour une variable aléatoire X, on définit l'*entropie* de X par

$$H(X) := \sum_{x\in X} \mathbf{P}(X = x) \log \big(\mathbf{P}(X = x)\big)$$

et de même, pour deux variables aléatoires X et Y sur le même espace de probabilité,

$$H(X, Y) := \sum_{x\in X,\, y\in Y} \mathbf{P}(X = x, Y = y) \log \big(\mathbf{P}(X = x, Y = y)\big).$$

Question. (★★) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même espace de probabilité, l'entropie $H(X, Y)$ est majorée par $H(X) + H(Y)$, et que l'égalité est atteinte si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Feuille 4 : Espérance

22 novembre 2010

Exercice 1. *Lois usuelles*

1. Calculer l'espérance et la variance de la loi de Bernoulli (de paramètre p).

2. Déterminer la fonction génératrice de la loi de Bernoulli. Retrouver les résultats de la question précédente à partir de celle-ci.

3. Calculer la fonction génératrice des lois (discrètes) usuelles : loi binomiale, loi de Poisson, loi géométrique.

4. Déterminer les espérances et variances des lois citées ci-dessus, en utilisant au choix un calcul direct ou la fonction génératrice.

Exercice 2. *Indépendance et espérance*

1. Montrer que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions f et g réelles bornées, $\mathbf{E}[f(X)g(Y)] = \mathbf{E}[f(X)]\,\mathbf{E}[g(Y)]$.

2. Trouver des variables aléatoires réelles *non* indépendantes X et Y telles que $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.

Exercice 3. *Approximation d'une variable aléatoire par une constante*

Question. Pour une variable aléatoire réelle bornée X, déterminer la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}[(X-t)^2].$$

Exercice 4. *Inégalité de Jensen*

Soit X une variable aléatoire et $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle I contenant les valeurs de X. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables.

1. Montrer que $f(\mathbf{E}[X]) \leqslant \mathbf{E}[f(X)]$.
Indication : *Observer que si $\mathbf{E}[X] \in \mathring{I}$, on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geqslant ax + b$ pour tout $x \in I$ avec égalité en $x = \mathbf{E}[X]$, et intégrer cette inégalité en prenant $x = X(\omega)$.*

2. En déduire que si $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbf{E}[|X|] < \infty$. Plus généralement, pour tous $0 \leqslant p \leqslant q$, montrer que $\mathbf{E}[|X|^q] < \infty$ implique $\mathbf{E}[|X|^p] < \infty$. Le retrouver par un raisonnement direct.

3. Montrer que si f est strictement convexe, l'égalité $f(\mathbf{E}[X]) = \mathbf{E}[f(X)]$ implique que X est constante.

Exercice 5. *Théorème de convergence monotone (cas discret)*

1. Soit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, une famille croissante $(x_{m,n})_{n\geqslant 0}$ de réels positifs, dont on note la limite $x_{m,\infty} \in [0,+\infty]$. Montrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} x_{m,n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{m\in\mathbb{N}} x_{m,\infty}.$$

2. En déduire que, si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires positives croissant vers une variables aléatoire X_∞[1], $\mathbf{E}[X_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[X]$.

3. En déduire que, si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille de variables aléatoires positives, $\mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[X_n]$.

Exercice 6. *Espérance et fonction de répartition*

1. Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

2. Supposons maintenant X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant t)\, dt$$

(les deux membres de l'égalité pouvant éventuellement être infinis).

3. Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} n\, \mathbf{P}(X > n)$ comme une espérance. Quelle est l'égalité correspondante pour X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$?

Exercice 7. *La « méthode probabiliste » en combinatoire*

Un *graphe* fini $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble fini V (les *sommets*) et d'un ensemble E de paires d'éléments de V (les *arêtes*). On dit que l'arête $e = \{x, y\}$ *relie* x et y. Un graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* de G si $V' \subset V$ et $E' \subset E$. Un graphe est dit *biparti* s'il existe un coloriage de ses sommets en deux couleurs de sorte qu'aucune arête ne relie deux sommets de même couleur.

1. Montrer que tout graphe fini $G = (V, E)$ admet un sous-graphe biparti contenant au moins $\frac{1}{2}|E|$ arêtes.
Indication : *Considérer un coloriage aléatoire des sommets et calculer l'espérance du nombre d'arêtes bicolores.*

2. On considère le graphe complet $G_n = (\{1, \dots, n\}, E_n)$, c'est-à-dire que E_n est l'ensemble de toutes les paires de sommets. Montrer que, dès que $\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}$, il existe un coloriage des arêtes de E_n tel qu'aucun sous-graphe à k sommets n'est unicolore.

[1]C.-à-d. que pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_n$ croît vers $X(\omega)$.

Feuille 5 : Inégalité de Markov – Loi des grands nombres

6 décembre 2010

Exercice 1. *Queue d'une loi sur* $\mathbb{R}_+$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1. Si $\mathbf{E}[X] < \infty$, montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant t) = o(1/t)$ quand $t \to \infty$.

2. (★) Trouver une contre-exemple à la réciproque : on peut avoir $\mathbf{P}(X \geqslant t) \overset{t\to\infty}{=} o(1/t)$ et pourtant $\mathbf{E}[X] = \infty$.

3. Montrer que néanmoins, si pour un $\eta > 0$ on a $\mathbf{P}(X \geqslant t) \overset{t\to\infty}{=} O(1/t^{1+\eta})$, alors $\mathbf{E}[X] < \infty$.
Indication : *Utiliser le résultat de l'exercice 6 de la feuille précédente.*

4. Plus généralement, pour $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, dire quelles sont les implications valides entre les propriétés "$\mathbf{E}[X^\alpha] < \infty$" et "$\mathbf{P}(X \geqslant t) \overset{t\to\infty}{=} O(t^{-\beta})$ (resp. $o(t^{-\beta})$)".

Un peu de vocabulaire : on dit que X *a un moment d'ordre* α pour dire que $\mathbf{E}[X^\alpha] < \infty$, et que X *a une queue polynômiale d'ordre* β pour dire que β est le supremum des β' tels que $\mathbf{P}(X \geqslant t) = O(t^{-\beta'})$. On dit également que X *a un moment exponentiel* s'il existe $c > 0$ tel que $\mathbf{E}[e^{cX}] < \infty$, resp. *une queue exponentielle* s'il existe $c > 0$ telle que $\mathbf{P}(X \geqslant t) = O(e^{-ct})$.

5. Montrer qu'avoir un moment exponentiel est équivalent à avoir une queue exponentielle (quel lien y a-t-il entre les constantes c des deux définitions ?), et en déduire qu'avoir un moment exponentiel implique d'avoir des moments polynômiaux de tous ordres.

Exercice 2. *Collection de vignettes*

La marque *Chocapic* offre, dans chacun de ses paquets de céréales, une vignette figurant un département français distribué uniformément parmi les n départements. Une collectionneur achète des boîtes une à une afin d'obtenir les vignettes du plus de départements différents possibles.

1. Soit X_k le nombre de boîtes à acheter pour obtenir k départements différents, où $k \in \{1, \ldots, n\}$. Écrire X_k comme une somme de variables géométriques indépendantes ; en déduire son espérance et sa variance.

2. On fait maintenant tendre n et k vers l'infini de façon que $k \sim pn$ pour un rapport $p \in (0, 1)$. Montrer que $\mathbf{P}\left(|X_k/n - E[X_k/n]| \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$. Étudier le comportement de $E[X_k/n]$ et montrer qu'on peut remplacer ce terme par une constante dans la limite précédente.

3. On prend maintenant $k = n$. Trouver une expression simple $T(n)$ telle que $\mathbf{P}\left(|X_n/nT(n) - 1| \geqslant \varepsilon\right)$ tende vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$. Commenter.

Exercice 3. *Cliques d'un graphe aléatoire*

Soit $n \geqslant 1$. On note $K_n = (\{1, \dots, n\}, E_n)$ le graphe complet sur $\{1, \dots, n\}$. Pour $p_n \in (0, 1)$, on définit, sur un espace de probabilité $(\Omega_n, \mathbf{P}_n)$, un sous-graphe aléatoire G_n de K_n en conservant chaque arête avec probabilité p_n, indépendamment les unes des autres. On note M_3 (c'est une variable aléatoire) le nombre de triangles (au sens du graphe) dans G_n.

1. Le nombre M_2 d'arêtes de G_n suit une loi binomiale (pourquoi ?) ; montrer que ce n'est en revanche pas le cas de M_3.
Indication : *Regarder les valeurs possibles de M_3 pour $n = 4$.*

2. Calculer $\mathbf{E}_n[M_3]$. En déduire que $\mathbf{P}_n(M_3 = 0) \overset{n\to\infty}{\to} 1$ dès que $np_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

3. Pour X une variable aléatoire positive bornée non identiquement nulle, montrer que pour $\alpha \in (0, 1)$:

$$\mathbf{P}(X \leqslant \alpha\,\mathbf{E}[X]) \leqslant (1-\alpha)^2 \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbf{E}[X]^2}.$$

4. ($\star$) Pour tout triangle T dans K_n, on note $A_T := \{T \text{ est un triangle de } G_n\}$. Montrer l'estimation :

$$\mathrm{Var}_n(M_3) \leqslant \mathbf{E}_n[M_3] + \sum_{S,T} \mathbf{P}_n(A_S \cap A_T),$$

où la somme est indexée par les couples de triangles de K_n ayant exactement une arête en commun. (nous faisons remarquer que deux triangles de K_n ne peuvent avoir que 0, 1 ou 3 arêtes en commun — pourquoi ?).

5. En déduire que, pour tout $C < \infty$, $\mathbf{P}_n(M_3 > C) \overset{n\to\infty}{\to} 1$ dès que $np_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

6. ($\star$) Adapter tout ce qui précède à M_4, le nombre de sous-graphes complets à 4 sommets dans G_n.

Exercice 4. *Grandes déviations*

1. Pour X une variable aléatoire de loi $Binomiale(n, p)$, pour $\lambda > 0$, calculer $\mathbf{E}[e^{\lambda X}]$.

2. En déduire que pour tout $x > p$, pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant nx) \leqslant \exp\Big(n\big[\log\big(1 + p(e^\lambda - 1)\big) - \lambda x\big]\Big).$$

3. Optimiser l'expression précédente sur λ, de façon à obtenir un résultat de la forme "$\mathbf{P}(X \geqslant nx) \leqslant e^{-nI(x)}$". Commenter le comportement de la fonction I.

4. ($\star\star$) Montrer qu'en fait,

$$\log \mathbf{P}(X \geqslant nx) \overset{n\to\infty}{\sim} -nI(x).$$

Exercice 5. *Comportement de la moyenne d'une variable aléatoire non intégrable*

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{E}[X] = +\infty$, au sens où $\mathbf{E}[X_-] < \infty$ et $\mathbf{E}[X_+] = \infty$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X ; on note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Question. Montrer que pour tout $C < \infty$, $\mathbf{P}(S_n/n > C) \to 1$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6. *Loi L^1 des grands nombres*

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{E}[|X|] < \infty$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X ; on note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Le but de cet exercice est de montrer la *loi L^1 des grands nombres* : quand $n \to \infty$, $\mathbf{E}\left[\left|S_n/n - \mathbf{E}[X]\right|\right] \to 0$.

1. On suppose dans un premier temps que $\mathbf{E}[|X|^2] < \infty$. Montrer que $\mathbf{E}\left[\left|S_n/n - \mathbf{E}[X]\right|\right] \leqslant \mathrm{Var}\left(S_n/n - \mathbf{E}[X]\right)^{1/2}$; en déduire le résultat dans ce cas.

2. On se place maintenant dans le cas général. Montrer que

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left|S_n/n - \mathbf{E}[X]\right|\right] \leqslant \mathbf{E}\left[\left|X - \mathbf{E}[X]\right|\right].$$

3. Si X est une variable aléatoire telle que $\mathbf{E}[|X|] < \infty$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une décomposition $X = Y + Z$ avec $\mathbf{E}\left[\left|Z - \mathbf{E}[Z]\right|\right] \leqslant \varepsilon$, $\mathbf{E}[|Y|^2] < \infty$ et $|\,\mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[Y]| \leqslant \varepsilon$.

4. En déduire la loi L^1 des grands nombres.

5. Retrouver la loi faible des grands nombres comme un corollaire de la loi L^1.

6. (★) Pour $p > 1$, est-il vrai de même que $\mathbf{E}\left[\left|S_n/n - \mathbf{E}[X]\right|^p\right] \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$?

Exercice 7. *Loi des grands nombres pour une suite dépendante*

Soit $n \geqslant 1$ et soit $(X_i)_{0<i\leqslant n}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable centrées telles que, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $\mathbf{E}[X_i X_j] = v(j-i)$, où $v \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une fonction ne dépendant pas de n, avec $\sum_{z\in\mathbb{Z}} |v(z)| < \infty$. On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) \stackrel{n\to\infty}{=} O(n)$.

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n/n| > \varepsilon) \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$.

Pour $p \in (0,1)$, soit $(U_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi $Bernoulli(p)$; pour $0 < i \leqslant n$, on pose $Y_i := U_{i-1}U_i$.

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour un réel α à préciser,

$$\mathbf{P}\left(\left|\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i\right) - \alpha\right| > \varepsilon\right) \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Indication : *Introduire $X_i := Y_i - \mathbf{E}[Y_i]$.*

Exercice 8. *Théorème de Stone – Weierstrass*

Le but de cet exercice est de donner une démonstration « probabiliste » du *théorème de Stone-Weierstrass* sur $\mathbb{R}$: pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, pour toute fonction continue $f\colon K \to \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme réel à une variable P tel que $|P(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in K$.

1. Montrer qu'il suffit de traiter le cas $K = [0, 1]$.

2. Pour X une variable aléatoire bornée par M, notant S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X, rappeler comment on peut majorer $\mathbf{P}(|S_n/n - \mathbf{E}[X]| \geqslant \varepsilon)$ en fonction de M et de $\varepsilon > 0$.

3. (★) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier la propriété suivante : si X est une variable aléatoire de loi $Binomiale(n, x)$, alors $\sup_{x\in[0,1]} |\mathbf{E}[f(X/n)] - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

4. Établir que, à n fixé, la fonction

$$x \mapsto \mathbf{E}[f(X/n)]$$

est polynomiale, où X note une variable aléatoire de loi $Binomiale(n, x)$.

Ce polynôme s'appelle l'*approximation de Bernstein* de f d'ordre n.

5. Démontrer le théorème de Stone – Weierstrass sur $\mathbb{R}$.

6. (★) Adapter le travail précédent au cas du théorème de Stone – Weierstrass sur $\mathbb{R}^n$ (le polynôme P étant alors un polynôme à n variables).
Indication : *On pourra prendre* $K = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1\}$. *Dans ce cas, un analogue pertinent de la loi de Bernoulli, pour* $(x_1, \ldots, x_n) \in K$, *est la loi* $Truc_n(x_1, \ldots, x_n)$ *qui vaut* $(1, \ldots, 1)$ *avec probabilité* x_1, $(0, 1, \ldots, 1)$ *avec probabilité* $(x_2 - x_1)$, …, $(0, \ldots, 0, 1)$ *avec probabilité* $(x_n - x_{n-1})$, *et* $(0, \ldots, 0)$ *avec probabilité* $(1 - x_n)$.

Exercice 9. *Un peu de statistique*

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_k$ des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ deux à deux distinctes. Quelqu'un choisit $\theta \in \{1, \ldots, k\}$ sans vous dire sa valeur, puis tire n variables aléatoires i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ selon la loi μ_θ. Votre objectif est de deviner θ à partir de la donnée des X_i.

1. (★) Montrer qu'il existe une fonction bornée $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, notant Z_τ une variable aléatoire de loi μ_τ, les $\mathbf{E}[f(Z_\tau)]$, $\tau \in \{1, \ldots, k\}$, sont tous distincts.

2. Grâce à la question précédente, imaginer un algorithme qui fait une proposition $\widehat{\theta}$ à partir de la donnée de $X_1, \ldots, X_n$, tel que $\mathbf{P}(\widehat{\theta} \neq \theta) \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Feuille 6 : Cahier de vacances

18 décembre 2010

Exercice 1. *Encore des boîtes et de l'argent*

Deux boîtes fermées sont présentées à un candidat, chacune contenant un chèque à son nom. Le candidat peut prendre le contenu de la boîte de son choix, mais pour se décider il n'a le droit de consulter que le contenu d'*une* boîte (au choix). Par ailleurs, les règles du jeu indiquent qu'on a placé un montant X dans une boîte et un montant $2X$ dans l'autre, où $X > 0$ est choisi avant chaque partie selon un procédé secret, et que les boîtes ont été mélangées. Le but du jeu pour le candidat est de maximiser son espérance de gain.

Le paradoxe est le suivant :

> *Les rôles des deux boîtes étant symétriques, le candidat décide arbitrairement d'ouvrir la première boîte. Il trouve que celle-ci contient a euros. Comme le candidat ne sait rien sur la façon dont on a choisi X, il y a une chance sur deux pour que la boîte choisie soit la moins bien dotée, et donc l'autre boîte contient $2a$ euros avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $a/2$ euros avec probabilité $\frac{1}{2}$, soit en moyenne*
> $$\frac{1}{2} \times (2a) + \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{5}{4}a > a,$$
> *de sorte que le candidat à avantage à changer de boîte (quel que soit le contenu vu dans la première). Compte-tenu de la symétrie du choix initial, cela est absurde.*

1. Quel est le point du raisonnement qui semble sujet à caution ?

Pour étudier la question plus finement, on précise le modèle. Afin d'éviter tout biais dû à la parité, on suppose que $X = 2^Q$, où Q suit une certaine loi de probabilité μ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Une variable aléatoire ξ de loi $\mathrm{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ indépendante de X détermine les contenus A et B des boîtes après mélange : si $\xi = 0$, alors $(A, B) = (X, 2X)$ et si $\xi = 1$, alors $(A, B) = (2X, X)$.

2. Reprendre la question précédente avec ce cadre : montrer qu'aucune loi μ ne justifie le raisonnement[1] .

3. Concrètement, on suppose que μ est la loi $\mathrm{Géométrique}(p)$. Déterminer pour quelles valeurs a telles que $P(A = a) > 0$ on a $\mathbf{E}[B|A = a] \geqslant a$, resp. $\mathbf{E}[B|A = a] < a$.

4. (★) Commenter le résultat selon la valeur de p. En particulier, observer que le cas $p \leqslant 1/2$ montre que la question 2 ne résout pas entièrement le paradoxe. Il y avait en effet une seconde erreur de raisonnement : laquelle ?

[1]On pourra éventuellement utiliser, pour formaliser le raisonnement, la notion d'espérance conditionnelle : l'espérance conditionnelle d'une v.a. X sachant l'événement M (où $P(M) > 0$) est simplement l'espérance par rapport à la probabilité conditionnelle $P(\cdot|M)$, c'est-à-dire $E[X|M] = \frac{1}{P(M)}E[X\mathbf{1}_M]$. C'est la moyenne de X parmi les éventualités où M est réalisé.

5. Même question qu'au n° 3 si μ est la loi $\mathrm{Poisson}(\lambda)$.

6. (★) μ est maintenant inconnue. Y a-t-il une stratégie *indépendante de* μ qui assure un gain moyen strictement supérieur à $\mathbf{E}[A]$? ($\mathbf{E}[A]$ est supposé fini).

Exercice 2. *Théorème de Perron – Frobenius*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\} =: V$, on se donne une loi de probabilité $(p(i,j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sur V, i.e. une famille de nombres tels que $p(i,j) \geqslant 0$ pour tout j et $\sum_{j=1}^n p(i,j) = 1$. On considère également une loi de probabilité μ_0 sur V (qui pourra varier dans la suite). Pour $T \in \mathbb{N}$, on définit alors une famille de variables aléatoires $(X_0, X_1, \dots, X_T)$ à valeurs dans V telle que

$$\mathbf{P}\left(X_0 = x_0 \text{ et } \dots \text{ et } X_T = x_T\right) = \mu_0(x_0) \prod_{t=0}^{T-1} p(x_t, x_{t+1}).$$

On pourra se représenter X_t comme la position au temps t d'un mobile qui a initialement la distribution de probabilité μ_0, et qui quand il est en x au temps t a une probabilité $p(x,x')$ de sauter en x' au temps $t+1$: c'est ce qu'on appelle une *chaîne de Markov*.

1. Montrer que pour tout t, pour tout $j \in V$:

$$\mathbf{P}(X_{t+1} = j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_t = i) p(i,j).$$

L'objectif de cet exercice est de comprendre la loi de X_t pour t grand. On notera μ_t la loi de X_t, i.e.

$$\mu_t := \big(\mathbf{P}(X_t = i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

2. Définissons

$$\overline{\mu}_t := \frac{1}{t} \sum_{u=0}^{t-1} \mu_u$$

(En d'autres termes, $\overline{\mu}_t$ est la loi de probabilité telle que $\overline{\mu}_t(i) := t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} \mu_u(i) \ \forall i$). Montrer que la suite $(\overline{\mu}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ possède (au moins) une valeur d'adhérence $\overline{\mu}$, et que celle-ci est bien une mesure de probabilité, i.e. $\overline{\mu}(i) \geqslant 0 \ \forall i$ et $\sum_{i=1}^n \overline{\mu}(i) = 1$.
Indication : *Utiliser un argument de compacité.*

3. Montrer que le $\overline{\mu}$ trouvé à la question précédente est une mesure d'équilibre de la chaîne de Markov, c.-à-d. que si $\mu_0 = \overline{\mu}$, alors $\mu_t = \overline{\mu} \ \forall t$. Dans la suite, $\overline{\mu}$ désignera simplement une mesure d'équilibre arbitraire de la chaîne de Markov.

4. Pour μ, ν deux mesures de probabilité sur $\{1,\dots,n\}$, on note

$$\|\nu - \mu\| := \sum_{i=1}^n |\nu(i) - \mu(i)|.$$

Montrer que pour toute mesure de probabilité μ_0 :

$$\|\mu_1 - \overline{\mu}\| \leqslant \|\mu_0 - \overline{\mu}\|.$$

Dans les questions qui suivent, on suppose que tous les $p(i,j)$ sont strictement positifs. On dit alors que la chaîne de Markov est *elliptique*.

5. (★) Montrer que sous l'hypothèse d'ellipticité, il existe une constante $C < 1$ indépendante de μ_0 telle que :

$$\|\mu_1 - \overline{\mu}\| \leqslant C\|\mu_0 - \overline{\mu}\|.$$

Indication : *Pour résoudre cette question, on sera forcé d'utiliser que la somme des* $(\mu_0(i) - \overline{\mu}_i)$ *est nulle. (Il s'agit plus d'un garde-fou que d'une véritable indication).*

6. En déduire que, quand $t \to \infty$, la loi de X_t converge vers $\overline{\mu}$:

$$\forall i \in V \qquad \mu_t(i) \overset{t\to\infty}{\to} \overline{\mu}(i),$$

avec une vitesse de convergence exponentielle indépendante de μ_0. Remarquer au passage que cela implique que $\overline{\mu}$ est unique.

On va maintenant faire le lien entre les chaînes de Markov et certaines matrices. Dans la suite de l'exercice, les mesures μ_t seront ainsi considérées comme des vecteurs-lignes.

7. Trouver une expression de μ_t en fonction de μ_0 et de la matrice de taille $n \times n$

$$Q := \big(p(i,j)\big)_{i,j\in V}.$$

Indication : *Procéder par récurrence sur t avec la question 1.*

8. (★) Grâce à cette expression matricielle, déduire des questions précédentes que 1 est une valeur propre de la transposée Q^{T}, *qu'il s'agit de l'unique valeur propre (même en tenant compte des dégénérescences éventuelles) de Q^{T} de module* $\geqslant 1$, et que le vecteur propre associé à cette valeur propre a toutes ses coordonnées positives (et donc strictement positives [pourquoi ?]). C'est le *théorème de Perron – Frobenius*.

9. Étendre le résultat de la question précédente où les $p(i,j)$ ne sont plus nécessairement *strictement* positives, mais où il existe $t \in \mathbb{N}^*$ pour lequel Q^t a toutes ses entrées strictement positives. Que signifie cette hypothèse en termes probabilistes ?

10. (★★) Qu'est-ce qui reste vrai du théorème de Perron – Frobenius quand on enlève complètement les hypothèses de stricte positivité ?

Exercice 3. *Matrices aléatoires*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice aléatoire $M^{(n)} = (X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de taille $n \times n$ définie de la façon suivante :

– Pour tout i, $X_{ii} = 0$;
– Pour les (i,j) tels que $i < j$, les variables aléatoires X_{ij} sont indépendantes, de loi uniforme sur $\{\pm 1\}$;
– Pour $i > j$, $X_{ij} = X_{ji}$.

La matrice $M^{(n)}$ est ainsi une matrice réelle symétrique, elle a donc n valeurs propres réelles. Notre objectif est de comprendre la loi d'une valeur propre tirée uniformément parmi ces n valeurs propres quand n tend vers l'infini. (Il y a donc deux niveaux d'aléa :

un pour choisir la matrice et un pour la valeur propre). Notons $\Lambda^{(n)}$ une telle valeur propre aléatoire. Pour comprendre le comportement asymptotique de $\Lambda^{(n)}$, on va seulement étudier le comportement de $\mathbf{E}[f(\Lambda^{(n)})]$ pour les fonctions f polynomiales : on veut donc étudier $\mathbf{E}[(\Lambda^{(n)})^k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer la trace $\mathrm{Tr}\left((M^{(n)})^k\right)$ en fonction des valeurs propres $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$ de $M^{(n)}$. En déduire que

$$\mathbf{E}\left[(\Lambda^{(n)})^k\right] = n^{-1}\,\mathbf{E}\left[\,\mathrm{Tr}\left((M^{(n)})^k\right)\right].$$

2. Développer $\mathbf{E}\left[\,\mathrm{Tr}\left((M^{(n)})^k\right)\right]$ comme une somme de termes de la forme $\mathbf{E}[X_{i_1j_1}X_{i_2j_2}\cdots X_{i_kj_k}]$.

3. Pour k impair, montrer que tous les termes de la somme sont nuls, de sorte que $\mathbf{E}[(\Lambda^{(n)})^k] = 0$.

4. Pour k pair, donner une condition nécessaire et suffisante sur les couples $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ pour que $\mathbf{E}[X_{i_1j_1}X_{i_2j_2}\cdots X_{i_kj_k}]$ soit non nulle, et déterminer alors la valeur de cette espérance.

5. (★) On dira qu'une famille $(i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k)$ est *génériquement bonne* si elle satisfait les conditions suivantes :

1. Pour tout $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, $j_l = i_{l+1}$, et $j_k = i_1$;
2. Pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$, $j_l \neq i_l$, et il existe un unique l' tel que $(i_{l'}, j_{l'}) = (j_l, i_l)$;
3. Le graphe formé par les arêtes $\{i_l, j_l\}$ (où l'on compte une seule fois pour $\{i_l, j_l\}$ et $\{i_{l'}, j_{l'}\}$) est un arbre.

Montrer que la contribution des termes correspondant aux familles non génériquement bonnes à l'espérance de la trace de $(M^{(n)})^k$ croît en $O(n^{k/2})$ quand $n \to \infty$.
***Indication :** Pour une famille (contribuant à la somme) qui n'est pas génériquement bonne, montrer qu'il y a au plus $k/2$ valeurs de i_l distinctes.*

6. (★) Pour k pair, Montrer qu'il existe exactement

$$\frac{1}{k/2+1}\binom{k}{k/2}\frac{n!}{(n-k/2-1)!}$$

familles génériquement bonnes.
***Indication :** On pourra utiliser le dénombrement des parenthésages corrects fait dans l'exercice 1 de la feuille 1.*

7. En déduire que, quand $n \to \infty$,

$$\mathbf{E}\left[(\Lambda^{(n)})^k\right] \sim \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} n^{k/2}.$$

8. (★) La *densité semi-circulaire* est la fonction m sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$m(x) := \mathbf{1}_{|x|\leqslant 2}(2\pi)^{-1}\sqrt{4-x^2}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} x^k m(x)\, dx = \mathbf{1}_{k \in 2\mathbb{N}} \frac{1}{k/2+1} \binom{k}{k/2}.$$

Indication : *Le cas k impair est trivial (pourquoi ?). Pour k pair, procéder par récurrence sur k en intégrant par parties.*

On a ainsi démontré un théorème-limite (pour la convergence contre les fonctions polynomiales) pour $\Lambda^{(n)}$: pour toute fonction polynomiale f sur $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\left[f\big(\Lambda^{(n)}/n^{1/2}\big)\right] \overset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x) m(x)\, dx.$$

9. (★★) Démontrer que le théorème-limite contre les fonctions polynômiales entraîne en fait la convergence contre toutes les fonctions f de la forme $\mathbf{1}_{[a,b]}$, i.e. que pour tous $a < b$:

$$\mathbf{P}\left(\Lambda^{(n)} \in [an^{1/2}, bn^{1/2}]\right) \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b m(x)\, dx.$$

Exercice 4. *De la loi faible des grands nombres à la loi forte*

Dans toute la suite de l'exercice, X est une v.a. d'espérance bien définie (i.e. telle que $\mathbf{E}[|X|] < \infty$) avec $\mathbf{E}[X] = 0$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère un espace de probabilité $(\Omega_m, \mathbf{P}_m)$ sur lequel on définit m copies indépendantes $X_1, \ldots, X_m$ de X. Pour $n \leqslant m$, on note alors $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ (noter que la loi des S_n ne dépend pas de m). Notre objectif est de démontrer la propriété suivante, dite *loi forte des grands nombres* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \mathbf{P}_m\Big(\sup_{n \leqslant p \leqslant m} |S_p/p| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

1. (★) L'énoncé usuel de la loi forte des grands nombres est le suivant : « si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite infinie de v.a. indépendantes de même loi que X (où X est intégrable et $E[X] = 0$), alors, avec probabilité 1, la suite aléatoire $\big((S_n)/n\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 en l'infini ». Expliquer pourquoi la formule ci-dessus y est équivalente, et pourquoi les auteurs ont écrit l'énoncé sous cette forme-là.

Dans la suite du problème, on suppose $\varepsilon > 0$ fixé.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_k := \mathbf{P}_{2^k}\Big(\sup_{2^{k-1} \leqslant p \leqslant 2^k} |S_p/p| \geqslant \varepsilon\Big).$$

Montrer qu'il suffit de prouver que la somme des A_k converge.

3. (★) Montrer que pour tout k,

$$\mathbf{P}_{2^k}\big(|S_{2^k}/2^k| \geqslant \varepsilon\big) \geqslant \mathbf{P}_{2^k}\Big(\sup_{2^{k-1} \leqslant p \leqslant 2^k} |S_p/p| \geqslant 4\varepsilon\Big) \times \sup_{0 \leqslant n \leqslant 2^{k-1}} \mathbf{P}_{2^{k-1}}\big(|S_n| \leqslant \varepsilon 2^k\big).$$

Indication : *Considérer le premier $p \geqslant 2^{k-1}$ éventuel pour lequel $|S_p|/p \geqslant 4\varepsilon$. Pour trouver la valeur de ce p, il suffit de connaître les valeurs de $X_1, \ldots, X_p$, de sorte que, connaissant p et S_p, les v.a. $X_{p+1}, \ldots, X_{2^k}$ restent i.i.d. et de même loi qu'initialement. Trouver alors une condition sur ces variables qui assure, en utilisant l'hypothèse "$|S_p|/p \geqslant 4\varepsilon$", que $|S_{2^k}/2^k| \geqslant \varepsilon$.*

4. Déduire de la loi faible des grands nombres, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant p\leqslant n} \mathbf{P}_n\left(|S_p| \geqslant \varepsilon n\right) = 0.$$

Indication : *Noter que $\mathbf{P}_n\left(|S_p| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant \mathbf{P}_p\left(|S_p| \geqslant \varepsilon p\right)$ si $p \leqslant n$ d'où une majoration uniforme par rapport à n pour p assez grand, et traiter le nombre fini d'indices p restants en prenant n assez grand.*

5. Grâce au résultat de la question précédente, déduire de la question 3 qu'il suffit de prouver que la somme des B_k définis ci-dessous converge :

$$B_k := \mathbf{P}_{2^k}\left(|S_{2^k}/2^k| \geqslant \varepsilon\right).$$

6. Pour $M < \infty$, on note $\widetilde{X}^{(M)} := \mathbf{1}_{\{|X|\leqslant M\}} X$. Montrer que $\mathbf{E}[\widetilde{X}^{(M)}] \overset{M\to\infty}{\to} 0$, et que si k est suffisamment grand pour que $|\,\mathbf{E}[\widetilde{X}^{(2^k)}]| \leqslant \varepsilon/2$:

$$B_k \leqslant \frac{4\,\mathbf{E}\left[|\widetilde{X}^{(2^k)}|^2\right]}{\varepsilon^2 2^k} + 2^k\,\mathbf{P}\left(|X| \geqslant 2^k\right).$$

Indication : *Il suffit de refaire la démonstration de la loi des grands nombres vue en cours.*

7. ($\star$) Déduire de la formule ci-dessus que la somme des B_k converge. Conclure.

8. Étendre l'énoncé de la loi forte des grands nombres quand l'espérance de X n'est plus forcément nulle.

9. ($\star$) Montrer que la loi forte des grands nombres implique la loi faible des grands nombres, mais *a priori* pas la loi L^1 (cf. exercice 6 de la feuille 5).

10. ($\star\star$) Montrer que toute v.a. X vérifiant la loi forte des grands nombres satisfait $\mathbf{E}[|X|] < \infty$.
Indication : *La question devient assez simple une fois qu'on connaît le* lemme de Borel-Cantelli *: les curieux pourront se renseigner sur la question...*

11. ($\star\star$) Montrer qu'en revanche, il existe des v.a. pour lequelles $\mathbf{E}[|X|] = \infty$ et qui pourtant vérifient la loi faible des grands nombres.
Indication : *On pourra regarder attentivement la preuve du cours et voir quelles sont les hypothèses minimales pour que celle-ci marche.*

Exercice 5. *Fonctions harmoniques discrètes*

☛ *Cet exercice utilise allègrement des marches aléatoires indexées par $\mathbb{N}$, qui en toute rigueur ne peuvent pas être définies sur un espace de probabilité dénombrable. Nous demandons aux élèves d'admettre néanmoins que, dans les cas présentés par cet exercice, ces marches ont un sens et qu'on peut manipuler les probabilités comme à l'accoutumée.*

Dans tout l'exercice, on considèrera un graphe $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des sommets de G et E l'ensemble de ses arêtes. On notera $x \sim y$ pour dire que x et y sont *voisins*, ce qui signifie que l'arête $\{x, y\}$ est dans E. On note $\deg(x)$ le *degré* de x, i.e. son nombre de voisins. On supposera G *connexe* (i.e. pour tous $x, y \in V$ il existe une suite d'arêtes de E reliant x à y). On dit qu'une fonction $f\colon V \to \mathbb{R}$ est *harmonique* sur V si elle satisfait le critère suivant :

$$\forall x \in V \quad f(x) = \frac{\sum_{y\sim x} f(y)}{\deg(x)}.$$

On dit qu'elle est harmonique sur une partie V^* de V si elle satisfait le même critère pour tout $x \in V^*$. On notera

$$\big(\Delta f\big)(x) = \frac{\sum_{y\sim x} f(y)}{\deg(x)} - f(x)$$

le *laplacien discret* de f ; dire que f est harmonique, c'est dire que son laplacien discret est nul.

Dans un premier temps, on prend G fini. On fixe une partie V_0 de V, non vide et de complémentaire non vide, et on se donne une fonction $f_0\colon V_0 \to \mathbb{R}$. Notre objectif est de trouver une fonction $f\colon V \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f_0 sur V_0 et qui soit harmonique sur $V \setminus V_0$: c'est ce qu'on appelle le *problème de Dirichlet* sur $V \setminus V_0$.

Pour $x \in V$, soit $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variable aléatoires à valeurs dans V définie par $X_0^x = x$, et par la relation

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1}^x = x \middle| X_0^x = x_0, \ldots, X_n^x = x_n\right) = \frac{\mathbf{1}_{x\sim x_n}}{\deg(x_n)}.$$

Autrement dit, X_{n+1}^x est tiré uniformément parmi les voisins de X_n^x. $(X_n^x)_n$ est appelée *marche aléatoire issue de* x (c'est un exemple de *chaîne de Markov*, cf. exercice 2).

1. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ et $x \in V$. Montrer la relation suivante :

$$\mathbf{E}\left[f(X_1^x) - f(x)\right] = (\Delta f)(x).$$

2. On note

$$\tau_x := \min\{n \geqslant 0\colon X_n^x \in V_0\}$$

le *temps d'atteinte* de V_0 par la marche issue de x (c'est une variable aléatoire, car la valeur de τ_x dépend de la trajectoire de $(X_n^x)_n$). Montrer que τ_n est fini avec probabilité 1.

3. (★) Pour tout $x \in V$, soit τ_x le temps d'atteinte de V_0 par la marche aléatoire issue de x, et $U_x := f_0\big(X_{\tau_x}^x\big)$ la valeur de f_0 au point où X^x atteint V_0 pour la première fois.

C'est une variable aléatoire bornée (par $\max|f_0|$), donc d'espérance bien définie. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in V$ par

$$f(x) = \mathbf{E}[U_x].$$

est harmonique. Elle résout donc le problème de Dirichlet.
Indication : *Distinguer selon la valeur de* X_1^x.

4. **(★)** Montrer que la fonction décrite ci-dessus est en la seule solution du problème de Dirichlet.
Indication : *Pour* f *harmonique sur* $V \setminus V_0$*, montrer par récurrence sur* n *que* $\mathbf{E}[f(X_{n\wedge\tau_x}^x)] = f(x)$*, puis faire tendre* n *vers l'infini.*

On se propose maintenant de montrer le *théorème de Liouville* sur $\mathbb{Z}^d$: « Toute fonction harmonique bornée est constante ». Soit donc f une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{Z}^d$.

Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, soient $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n^y)_{n\in\mathbb{N}}$ deux marches aléatoires (pas indépendantes) issues resp. de x et y, vérifiant la propriété suivante : si $X_n^x = X_n^y$, alors $X_{n'}^x = X_{n'}^y$ pour tout $n' \geqslant n$. (Autrement dit, si à un moment donné les deux marches se retrouvent au même point, alors elles « fusionnent » et évoluent de conserve ensuite). Soit $\mathbb{Z}^d \supset \Lambda_m := [-m, m]^d$. On note p_m la probabilité que les marches issues de x et de y se rencontrent avant de toucher le bord de Λ_m.

5. Montrer que

$$|f(y) - f(x)| \leqslant (1 - p_m) \sup_{\mathbb{Z}^d} |f|.$$

Indication : *Utiliser le résultat des deux questions précédentes avec* $V = \Lambda_m$ *et* $V_0 = \partial\Lambda_m$.

6. **(★)** Montrer qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 finit par toucher 0 avec probabilité 1. (Cette question est indépendante de la précédente).
Indication : *Considérer la fonction* $\varphi(x)$ *sur* $\mathbb{N}$ *définie comme la probabilité qu'une marche aléatoire issue de* x *finisse par toucher* 0*. Cette fonction est harmonique sur* $\mathbb{N}^*$ *et bornée (pourquoi ?). En déduire le résultat en montrant le théorème de Liouville sur* $\mathbb{N}$ *(ce que l'on fera par un argument analytique, en décrivant toutes les fonctions harmoniques sur* $\mathbb{N}^*$*).*

7. **(★)** Montrer qu'il est possible de définir deux marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^3$, issues de $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$, qui finissent par se rencontrer avec probabilité 1.
Indication : *Cette question demande seulement un peu de* réflexion.

8. En déduire que $f(-1, 0, 0) = f(1, 0, 0)$, puis que f est constante sur tous les (x, y, z) tels que $x + y + z$ soit impair, puis que f est constante sur tout $\mathbb{Z}^d$.

On va maintenant étudier la marche aléatoire sur un arbre. Pour $d \geqslant 3$, on note T_d l'*arbre régulier de degré* d, c'est-à-dire l'unique graphe connexe sans cycle dont tous les sommets ont pour degré d. On peut par exemple le réaliser en prenant pour V l'ensemble des mots finis (éventuellement vides), écrits avec un alphabet de d lettres, qui ne contiennent jamais deux lettres successives identiques ; deux mots sont alors voisins si on passe de l'un à l'autre en ajoutant ou en retirant une lettre à son bout. On notera $\varnothing$ le mot vide, que l'on appellera la *racine* de l'arbre. La distance d'un mot x à la racine est alors son nombre de lettres ; on la notera $l(x)$.

9. Soit (X_n) une marche aléatoire sur T_d, issue de la racine. Autrement dit, à chaque instant n, connaissant X_n, on construit X_{n+1} soit en lui retirant sa dernière lettre, soit en lui ajoutant l'une des $(d-1)$ lettres de l'alphabet autorisées, chacun de ces choix étant réalisé avec une probabilité égale à $1/d$.[2] Montrer que la longueur de X_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini avec probabilité 1.
Indication : *Utiliser la loi forte des grands nombres (cf. exercice 4) pour montrer que, avec probabilité* 1, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \big(l(X_n)/n\big) \geqslant 1 - 2/d > 0$.

10. On considère la marche aléatoire sur l'arbre issue de x, de loi $\mathbf{P}_x$. Montrer qu'avec probabilité 1, il existe un instant après lequel la première lettre de X_n ne change plus.
Indication : *Observer que d'après la question précédente, il existe un instant après lequel la marche ne passera plus en* $\varnothing$ *(pourquoi ?).*

11. Notons Y la valeur stationnaire de la première lettre des mots de la marche aléatoire. Fixons une lettre de l'alphabet a. Montrer que la fonction $f(x) := \mathbf{P}_x(Y = a)$ est harmonique sur T_d et bornée.

12. (★) Montrer que f est non constante. Le théorème de Liouville est donc faux pour T_d.
Indication : *Exprimer* $f(x)$ *en fonction de la première lettre du mot* x *et de la probabilité que la marche issue de* x *passe par* $\varnothing$. *Il faut alors montrer qu'il existe un* x *tel que la probabilité que la marche issue de* x *passe par* $\varnothing$ *soit strictement inférieure à* 1.

[2]Avec une petite nuance pour $X_n = \varnothing$, puisqu'il n'y a alors pas de première lettre à retirer, mais qu'on a le droit d'ajouter n'importe laquelle des d lettres de l'alphabet.