

## DEVOIR À LA MAISON

---

La qualité de la présentation et de la rédaction sera prise en compte.

**Exercice 1.** Soit  $\theta$  un nombre réel. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A^2 = A$ .

2. On pose  $I = I_2 \in \mathcal{M}_2$  (matrice identité). Dédurre de 1 que  $(A + I)^2 = I + 3A$ .

**Exercice 2.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Quelle taille doit avoir une matrice  $B$  telle que  $BA = I_2$  ?

2. Trouver toutes les matrices  $B$  telles que  $BA = I_2$ . On sera amené à résoudre un système d'équations, en suivant la méthode du pivot.

**Exercice 3.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $AB = AC$ . La matrice  $A$  peut-elle être inversible ?

2. Déterminer tous les vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , en utilisant la méthode du pivot.

**Exercice 4.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3x - y + 2z = 1 \\ 4x - 2y - 15z = a \end{cases}$$

en fonction du paramètre  $a$ , en utilisant la méthode du pivot.

**Exercice 5.** Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

en utilisant la méthode du pivot.

**Exercice 6.**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_3$  une matrice telle que  $A^3 = 0$ . On note  $I = I_3$  la matrice identité et on pose  $M = I - A$ . Calculer  $(I - A)(I + A + A^2)$  et en déduire que  $M$  est inversible et donner son inverse.

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

b) À l'aide des questions précédentes, montrer que  $M$  est inversible et calculer son inverse.