Université Paris 13, IUT de Saint-Denis
Année universitaire 2011-2012

Licence Pro MDQ – Mathématiques appliquées

Fiche 3 – Déterminant et diagonalisation

Déterminant

Exercice 1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit a un nombre réel. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

Valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en déduire que X est vecteur propre ; quelle est la valeur propre associée ?
2. Quel est l'espace propre associé à cette valeur propre ?

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Par définition, que signifie le fait que 0 soit valeur propre de A ?
2. Montrer que 0 est valeur propre de A.
3. Déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 0.

Exercice 5. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique P_A de A.
2. En déduire les valeurs propres de A et leurs multiplicités. Écrire P_A sous forme factorisée

Exercice 6. Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes et le factoriser.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 & -1 \\ 5/4 & 3/4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalisation

Exercice 7. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis donner les valeurs propres de M et leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M, une base et la dimension de chacun d'eux.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner les matrices D et P associées.

Exercice 8. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis donner les valeurs propres de M et leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M, une base et la dimension de chacun d'eux.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner les matrices D et P associées.

Exercice 9. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis donner les valeurs propres de M et leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M, une base et la dimension de chacun d'eux.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner les matrices D et P associées.

Exercice 10. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis donner les valeurs propres de M et leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M, une base et la dimension de chacun d'eux.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner les matrices D et P associées.

Exercice 11. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis donner les valeurs propres de M et leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M, une base et la dimension de chacun d'eux.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner les matrices D et P associées.