Université Claude Bernard Lyon 1 **MATHS 4**
Mars 2008

DM facultatif

1. Étudier la nature des intégrales suivantes (bien penser à commencer par regarder sur quel intervalle la fonction que l'on intègre est définie et continue) :

$$\int_0^1 \frac{1+t\sqrt{t}}{t^2+\sqrt{t}}\,dt \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt \qquad \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt \qquad \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{t\ln t}{1+t^2}\,dt \qquad \int_{2/\pi}^\infty \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2}\,dt \qquad \int_0^\infty \frac{\arctan t}{t}\,dt \qquad \int_0^\infty \sin t\,dt$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ (intégrer par parties (sur $[1,a]$) pour se ramener à $\frac{\cos t}{t^2}$) $\qquad \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ (écrire $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ et utiliser la question précédente)

$\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ (comparer à la précédente)

$\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^2)\,dt$ (poser $u=t^2$ (sur $[1,a]$) et intégrer par parties (sur $[1,a^2]$) pour se ramener à $\frac{\cos u}{u^{3/2}}$)

2. On considère la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante (sans dériver F).

3. On considère la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+t}\,dt$.

1. Justifier que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ (le montrer sur $[x_0,+\infty[$ d'abord, où $x_0>0$).
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ (le montrer sur $[x_0,x_1]$ d'abord, où $0<x_0<x_1$).

4. On considère la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x}\,dt$.

1. Montrer que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que F est continue, et dérivable sur $]0,+\infty[$.