Université Claude Bernard Lyon 1 **MATHS 4**
Mars 2008

Un corrigé possible du DM

1. $\bullet \int_0^1 \frac{1+t\sqrt{t}}{t^2+\sqrt{t}}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{1+t\sqrt{t}}{t^2+\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$. Elle est positive, $\frac{1+t\sqrt{t}}{t^2+\sqrt{t}} \sim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}$, et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, donc $\int_0^1 \frac{1+t\sqrt{t}}{t^2+\sqrt{t}}\,dt$ converge.

$\bullet \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1 car $\frac{\sin^2 t}{t^2} \to_{t\to 0^+} 1$. Par suite, $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ converge. Et, pour $t \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc $\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ converge. En conclusion, $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ converge.

$\bullet \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt$: la fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On a $t^2 e^{-\sqrt{t}} = e^{2\ln t - \sqrt{t}} \to_{t\to\infty} 0$ (car $\ln t - \sqrt{t} \to -\infty$), donc il existe $T > 0$ tel que, pour $t \geq T$, $t^2 e^{-\sqrt{t}} \leq 1$, soit $0 \leq e^{-\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$. Or $\int_T^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc $\int_T^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt$ converge. Et donc $\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt$ aussi vu la continuité sur $[0,T]$.

$\bullet \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$: la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$; on regarde les intégrales sur $]0,1/2]$ et $[1/2,1[$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable ; par contre, en 1, elle est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, et $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ diverge (au changement de variable $t' = 1-t$ près, c'est $\int_0^1 \frac{1}{t'}\,dt'$). Donc $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ diverge.

$\bullet \int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et on remarque qu'elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1 car $e^t - 1 \sim_{t\to 0} t$, donc l'intégrale sur $]0,T]$ converge quel que soit T. De plus, $t^2 \frac{t}{e^t-1} \to_{t\to\infty} 0$, d'où $T > 0$ tel que, pour $t \geq T$, $0 \leq \frac{t}{e^t-1} \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_T^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc $\int_T^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$ converge, et enfin $\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$ converge.

$\bullet \int_0^1 \frac{t\ln t}{1+t^2}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{t\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,1]$, et se prolonge par continuité par la valeur 0 en 0 puisque $t\ln t \to_{t\to 0} 0$. Ainsi, l'intégrale est celle d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et donc converge.

$\bullet \int_{2/\pi}^\infty \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,dt$: pour tout $t > 2/\pi$, $0 < \frac{1}{t} < \pi/2$, donc $0 < \cos\frac{1}{t} < 1$, et la fonction $t \mapsto \ln\cos\frac{1}{t}$ est donc bien définie sur $]2/\pi,+\infty[$, et négative sur cet intervalle. On étudie séparément les intégrales sur $]2/\pi,1]$ et sur $[1,+\infty[$. Pour $t \to +\infty$: $\cos\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})$; or $\ln(1+u) \sim_{u\to 0} u$, donc $\ln\cos\frac{1}{t} \sim -\frac{1}{2t^2}$. Ces fonctions sont négatives, et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}$ converge, donc $\int_1^\infty \ln\cos\frac{1}{t}\,dt$ converge. En $2/\pi$: pour se ramener en 0, on écrit $\cos\frac{1}{t} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t})$; puis $\sin u \sim_{u\to 0} u$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} \to_{t\to\frac{2}{\pi}} 0$, donc $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}) \sim_{t\to\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2t}(t - \frac{2}{\pi}) \sim_{t\to\frac{2}{\pi}} \frac{\pi^2}{4}(t - \frac{2}{\pi})$. On en déduit, pour $t \to \frac{2}{\pi}$, $\ln\cos\frac{1}{t} \sim \ln(\frac{\pi^2}{4}(t - \frac{2}{\pi}))$ (par la propriété sur ln et les équivalents). Or ces fonctions sont négatives, et $\int_{2/\pi}^1 \ln(t - \frac{2}{\pi})\,dt$ converge (au changement de variable $u = t - \frac{2}{\pi}$ près, c'est $\int_0^{1-\frac{2}{\pi}} \ln u\,du$, qui converge comme on sait), donc $\int_{\frac{2}{\pi}}^1 \ln\cos\frac{1}{t}\,dt$ converge.

$\bullet \int_0^\infty \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour l'étudier, on découpe l'intégrale en deux morceaux. Comme, pour $t \to 0$, on a : $\frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2} \sim \frac{t\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{t}}$, que ces fonctions sont positives, et que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, $\int_0^1 \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2}\,dt$ converge. En $+\infty$, on veut majorer par une fonction de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ (l'idée est que le log est "petit" par rapport à t^ε pour tout $\varepsilon > 0$). Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^\varepsilon} \to_{t\to\infty} 0$, d'où $T > 0$ tel que, pour $t \geq T$, $\ln(1+t\sqrt{t}) \leq t^\varepsilon$. Alors, pour $t \geq T$, $0 \leq \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2} \leq \frac{1}{t^{2-\varepsilon}}$. On choisit $\varepsilon = 1/2$. Alors $2 - \varepsilon = 3/2 > 1$, donc $\int_T^\infty \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge. On en déduit que $\int_T^\infty \frac{\ln(1+t\sqrt{t})}{t^2}\,dt$ converge. Finalement, en recollant les morceaux, l'intégrale sur $]0,+\infty[$ converge.

$\bullet \int_0^\infty \frac{\arctan t}{t}\,dt$: la fonction $t \mapsto \frac{\arctan t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle se prolonge par continuité en 0, mais de toute façon, pour $t \to \infty$, $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{\arctan t}{t} \sim \frac{\pi}{2t}$, ces fonctions sont positives, et $\int_1^\infty \frac{1}{2t}\,dt$ diverge, donc $\int_1^\infty \frac{\arctan t}{t}\,dt$ diverge. Donc *a fortiori* $\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t}\,dt$ diverge.

•$\int_0^\infty \sin t\,dt$: $t\mapsto \sin t$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $a>0$, $\int_0^a \sin t\,dt = 1-\cos a$, et cette fonction n'admet pas de limite quand a tend vers $+\infty$, donc l'intégrale diverge.
•$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$: la fonction $t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. En intégrant par parties, on obtient pour tout $a>0$, $\int_1^a \frac{\sin t}{t}\,dt = [\frac{-\cos t}{t}]_1^a - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2}\,dt = -\frac{\cos a}{a} + \cos 1 - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. Or, lorsque a tend vers $+\infty$, $\frac{\cos a}{a}\to 0$ (car $|\cos a|\leq 1$) et, comme $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge ($|\frac{\cos t}{t^2}|\leq \frac{1}{t^2}$), $\int_1^a \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ admet une limite finie (à savoir l'intégrale sur $[1,+\infty[$). Donc $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
•$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$: on procède comme pour la précédente, et on obtient donc que l'intégrale converge.
•$\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$: la fonction $t\mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Pour tout $a>0$, en écrivant $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on obtient : $\int_1^a \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_1^a \frac{1}{2t}\,dt - \int_1^a \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$. Or, d'une part, $\int_1^a \frac{1}{2t}\,dt$ diverge vers $+\infty$ quand a tend vers $+\infty$ ($\int_1^a \frac{dt}{t} = \ln a$). Et d'autre part $\int_1^a \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt = \int_2^{2a} \frac{\cos u}{u}\,\frac{dt}{2}$ admet une limite finie (à savoir $\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos u}{u}\,dt$) quand a tend vers $+\infty$, d'après la question précédente. Il en résulte que $\int_1^a \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge vers $+\infty$ quand a tend vers $+\infty$, donc $\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge.
•$\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt$: pour tout $t>0$, on a $|\sin t|\leq 1$ donc $\sin^2 t\leq |\sin t|$, et : $0\leq \frac{\sin^2 t}{t}\leq \left|\frac{\sin t}{t}\right|$. Par la question précédente, $\int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge, donc il en va de même de $\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt$. *Remarque :* ceci fournit donc un exemple de fonction dont l'intégrale (impropre) converge, mais qui n'est pas absolument intégrable.
•$\int_1^\infty \sin(t^2)\,dt$: $t\mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[1,+\infty[$. Pour tout $a>0$, on a, en posant $u=t^2$: $\int_1^a \sin(t^2)\,dt = \int_1^{a^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$ et, en intégrant par parties, $\int_1^{a^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = [\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}]_1^{a^2} - \frac{1}{2}\int_1^{a^2} \frac{\cos u}{u^{3/2}}\,du$. On raisonne comme tout à l'heure (pour $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$) pour conclure qu'en conséquence l'intégrale converge. *Remarque :* ceci fournit un exemple de fonction qui n'admet pas de limite en $+\infty$ et dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ converge néanmoins.

2. On note $f(t,x) = \frac{1}{1+x^3+t^3}$.

1. Soit $x\geq 0$. La fonction $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Comme $\frac{1}{1+x^3+t^3}\sim_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}$, que ces fonctions sont positives, et que $\int_1^\infty \frac{dt}{t^3}$ converge, $\int_1^\infty f(t,x)\,dt$ converge. Et donc $\int_0^\infty f(t,x)\,dt$ converge aussi (vu la continuité de $t\mapsto f(t,x)$ sur $[0,1]$). Ainsi, $F(x)$ est bien défini. F est donc définie sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto f(t,x)$ est continue. De plus, pour tous $x\geq 0$ et $t\geq 0$, $0\leq f(t,x) = \frac{1}{1+x^3+t^3}\leq \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$ et, comme ci-dessus, φ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de continuité : F est continue sur $[0,+\infty[$. Pour voir la décroissance, il suffit de remarquer que, pour tous $0\leq x\leq y$, $f(t,x) = \frac{1}{1+t^3+x^3}\geq \frac{1}{1+t^3+y^3} = f(t,y)$ et donc, en intégrant, $F(x)\geq F(y)$.

3. On définit $f(t,x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+t}$.

1. Soit $x>0$. Pour tout $t\geq 0$, $0\leq \frac{e^{-tx^2}}{1+t}\leq e^{-tx^2}$ et $\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dt$ converge (c'est une fonction exponentielle décroissante, $x^2>0$ étant fixé). $F(x)$ est donc bien définie. F est donc définie sur $]0,+\infty[$.
2. Notons déjà que, pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $x_0>0$. Pour tout $x\geq x_0$ et tout $t>0$, $e^{-tx^2}\leq e^{-tx_0^2}$, d'où $0\leq f(t,x)\leq f(t,x_0)=\varphi(t)$, et la fonction φ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (on l'a montré en 1). Donc le théorème de continuité s'applique et montre que F est continue sur $[x_0,+\infty[$. On a démontré ceci pour tout $x_0>0$, donc F est en fait continue sur $]0,+\infty[$.
3. Notons pour commencer que, pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{-2xte^{-tx^2}}{1+t}$. Cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$: on procède comme d'habitude pour montrer que $\left|\frac{-2xte^{-tx^2}}{1+t}\right|\leq \frac{1}{t^2}$ pour $t\geq T$ où T est choisi assez grand (en disant que t^2 fois la fonction converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$). Notons que l'intégrabilité sera aussi une conséquence de la domination (qui reste à démontrer). Soit

$0 < x_0 < x_1$. Pour tous $x_0 < x < x_1$ et $t \geq 0$, $\left|\frac{-2xte^{-tx^2}}{1+t}\right| \leq \frac{2x_1te^{-tx_0^2}}{1+t} = \widetilde{\varphi}(t)$. La fonction $\widetilde{\varphi}$ (qui ne dépend pas de x) est intégrable par le même argument que ci-dessus (majoration par $\frac{1}{t^2}$ pour $t \geq T$). On peut donc appliquer le théorème de dérivation, qui montre que F est dérivable sur $[x_0, x_1]$ et que, pour tout $x \in [x_0, x_1]$, $F'(x) = \int_0^\infty \frac{-2xe^{-tx^2}}{1+t}\,dt$. Ceci vaut pour tous x_0, x_1, donc F est dérivable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. F est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. On note $f(t, x) = \frac{\cos t}{t+x}$.

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc son intégrale sur ce segment converge.
2. On pourrait appliquer successivement le théorème de continuité et le théorème de dérivation ; en fait, on peut aussi appliquer le théorème de dérivation directement, et c'est ce que ce que l'on va faire. On vient de vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t, x)\,dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\frac{\cos t}{(t+x)^2}$. Pour tout $x > 0$, l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ résulte simplement de la continuité de cette fonction sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par contre cet argument ne donne pas directement de domination. Soit $x_0 > 0$. Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq \frac{1}{t+x_0} = \varphi(t)$, et φ, continue sur le segment $[0, \pi/2]$, est donc intégrable sur cet intervalle (de plus φ ne dépend pas de x). Tout ceci montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$ et que sa dérivée est $F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos t}{(t+x)^2}\,dt$. Ceci vaut pour tout $x_0 > 0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.