UE : Math 4

Fiche 3 **2008-09**

Produit de convolution et Transformée de Fourier

1.

1. Montrer, lorsque $f*g$ a un sens, que $f*g = g*f$: le produit de convolution est **commutatif**.
2. Pour $a > 0$, on définit la fonction «porte» de largeur $2a$ par
$$P_{2a}(t) = \mathbf{1}_{[-a,+a]}(t).$$
Pourquoi les produits de convolution suivants sont-ils définis ? :
$$f(x) = (\sin *P_{2a})(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (\cos *P_{2a})(x).$$
Les calculer.
3. On suppose que f est bornée et à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$) et que $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (c'est à dire que g est absolument intégrable sur tout segment). Montrer qu'alors $h = f * g$ est toujours bien définie.
4. Vérifier que si f, g sont continues par morceaux et **causales**, c'est à dire nulles sur $\mathbb{R}_-$, alors $h = f * g$ est toujours bien définie, et est aussi causale.

2. Soit f et g deux fonctions dont on peut définir le produit de convolution $h = f * g$. Montrer que :

1. Si f et g ont même parité alors h est paire, et si f et g sont de parité différente alors h est impaire ;
2. Si f (ou g) est translatée de a alors h est translatée de a ; c'est à dire :
$$(\tau_a f) * g = \tau_a(f * g).$$
3. On suppose $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec f' bornée.
En utilisant le théorème de dérivation, montrer que $f*g$ est dérivable et calculer sa dérivée.

3. On rappelle que la fonction de Heavyside H est définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par
$$H(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$
Soit a et b deux réels positifs. Calculer les produits de convolution suivants :

- $h_1 = P_{2a} * P_{2b}$
- $h_2 = (H(t)e^{-at}) * (H(t)e^{-bt})$
- $h_3 = P_{2a}(t - a) * (H(t)e^{-bt})$
- $h_4 = P_{2a}(t - a) * e^{-bt}$

4. Ω est un nombre réel > 0, habituellement $1, -1, 2\pi$ ou -2π.

1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_\Omega(f)$ sa transformée de Fourier. Supposons que f est à valeurs réelles. Montrer que :
   (a) si f est paire, alors
   $$\mathcal{F}_\Omega(f)(\nu) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\Omega\nu t)\,dt$$
   (b) et si f est impaire, alors
   $$\mathcal{F}_\Omega(f)(\nu) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\Omega\nu t)\,dt.$$
   Dans les deux cas, donner les propriétés de la fonction $\mathcal{F}_\Omega(f)$.
2. Utiliser ce résultat pour trouver les transformées de Fourier de la fonction P_a et de la fonction Δ_a définie par
   $$\Delta_a(t) = \left(1 - \frac{|t|}{a}\right)\mathbf{1}_{[-a,+a]}(t)$$
   pour $a > 0$.
3. Calculer
   $$I(\omega) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\cos\omega x\,dx.$$

5. Établir les égalités suivantes :

1. $\mathcal{F}(\sigma f) = \sigma(\mathcal{F}(f))$
2. $\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\sigma\mathcal{F}(f)}$
3. $\mathcal{F}(h_k f) = \frac{1}{|k|}h_{\frac{1}{k}}\mathcal{F}(f)$
4. $\mathcal{F}(\tau_a f)(\nu) = e^{-i\Omega\nu a}\mathcal{F}(f)(\nu)$
5. $\mathcal{F}(e^{i\Omega\nu_0 t}f(t)) = \tau_{\nu_0}\mathcal{F}(f)$

6. On considère, pour $a > 0$, la fonction $f_a(t) = H(t)e^{-at}$, ainsi que g_a et h_a définies par :

$$g_a(t) = f_a(t) + f_a(-t)$$

$$h_a(t) = f_a(t) - f_a(-t).$$

1. Etudier f_a, g_a et h_a et calculer leurs transformées de Fourier.
2. En déduire, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale :
   $$I(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+x^2}\,dx.$$
   En admettant que la formule d'inversion est encore valable pour des fonctions de carré intégrable (ce qui sera justifié plus tard), déduire aussi la valeur de $J(\omega) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\omega x}{1+x^2}\,dx.$

7. Rappeler quelle est la transformée de Fourier de la fonction porte P_{2a}. Décrire la fonction

$$f(t) = P_{2a}(t)P_{2b}(t).$$

Utiliser la transformée de Fourier pour calculer le produit de convolution

$$\frac{\sin \pi at}{\pi t} * \frac{\sin \pi bt}{\pi t}.$$

Attention : On admettra ici que la formule $\mathcal{F}(fg) = \frac{|\Omega|}{2\pi}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ est valable dès que $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(g)$ sont de carré intégrable (ceci sera justifié plus tard).

8.

1. Montrer que si f est une fonction continue, C^1 par morceaux, telle que f et f' sont sommables, alors
$$\mathcal{F}(f')(\nu) = i\Omega\nu\mathcal{F}(f)(\nu).$$
2. Montrer que si $f \in L^1$ est telle que $t \mapsto tf(t)$ est également dans L^1, alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et
$$(\mathcal{F}(f))'(\nu) = \left(\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}(f)\right)(\nu) = -i\Omega\mathcal{F}(tf(t))(\nu).$$

9.

1. Montrer sans calcul que la fonction
$$f(t) = e^{-\pi t^2}$$
admet une transformée de Fourier.
2. Écrire la définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f pour $\Omega = 2\pi$.
3. En utilisant le théorème de dérivation, montrer que $\mathcal{F}(f)$ satisfait l'équation différentielle
$$(E) \quad \frac{dy}{d\nu} + 2\pi\nu y = 0$$
4. En déduire que $\mathcal{F}(f) = Ke^{-\pi\nu^2}$ où K est une constante que l'on calculera grâce au théorème d'inversion.

10. Soit une fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation intégrale suivante (E) :

$$(E) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-a(t-u)^2}du = e^{-t^2}$$

où a est un réel fixé > 1.

1. Quelle est la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$? (on prend $\Omega = 2\pi$, et on rappelle que l'exercice précédent montrait $\mathcal{F}_{2\pi}(e^{-\pi t^2})(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$)
2. Remarquer que le premier membre de (E) est un produit de convolution.
3. Déterminer la solution f de l'équation (E) en calculant la transformée de Fourier des deux membres de (E).