UE : Maths 4

Fiche 4 **2007-2008**

Transformée de Laplace des fonctions et équations différentielles

1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes, en précisant l'abscisse d'intégrabilité :

$$f_1(t) = H(t) \qquad f_2(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \qquad f_3(t) = t\,H(t) \qquad f_4(t) = t^k H(t)$$

(où $k \in \mathbb{N}$)

$$f_5(t) = H(t)e^{-\alpha t} \qquad f_6(t) = \cos(\omega t)H(t) \qquad f_7(t) = \sin(\omega t)H(t) \qquad f_8(t) = \frac{\sin t}{t}H(t)$$

(où $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$)

$$f_9(t) = \sinh(\omega t)H(t) \qquad f_{10}(t) = \cosh(\omega t)H(t) \qquad f_{11}(t) = \begin{cases} \sin(t - \frac{3\pi}{4}) & \text{si } t > \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour chacune des fonctions ϕ suivantes, déterminer la fonction causale f telle que $\mathcal{L}(f)(z) = \phi(z)$:

1. $\phi(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$
2. $\phi(z) = \ln \frac{z^2+a^2}{z^2}$ (on calculera ϕ')
3. $\phi(z) = \frac{z^2+7}{(z^2+1)^2}$

3. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = \varphi(t).$$

1. On suppose $\varphi(t) = \sin t$. Déterminer la solution f sur $[0, +\infty[$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. *(Appliquer la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation pour déterminer $\mathcal{L}(f)(z)$ et ensuite retrouver f)* .
2. On suppose $\varphi(t) = e^{-t}$. Déterminer la solution f sur $[0, +\infty[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

4. À l'aide de la transformée de Laplace, déterminer les fonctions causales f vérifiant les équations intégrales suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, $\displaystyle\int_0^t f(x)e^{t-x}\,dx = \sin t$.
2. Pour tout $t \geq 0$, $\displaystyle f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x)\,dx = \cos t$.

(Reconnaître dans les intégrales des produits de convolution)

5. On définit la fonction J_0 pour $t \geq 0$ par :

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t \sin\theta)d\theta.$$

1. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle :

   $$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0.$$

   Préciser $J_0(0)$ et $J_0'(0)$.
2. Appliquer la transformée de Laplace à cette équation différentielle, en supposant J_0 nulle pour $t < 0$, pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{L}(J_0)$. Résoudre cette équation pour en déduire $\mathcal{L}(J_0)$ *(pour déterminer la constante, calculer la limite de $z\mathcal{L}(J_0)(z)$ lorsque z tend vers $+\infty$)*. Calculer alors $\mathcal{L}(J_0 * J_0)$ et enfin $J_0 * J_0$.