

Distributions (1)

Rappels :

- Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I si et seulement si elle est indéfiniment dérivable sur I .
- Un segment est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} (autrement dit, de la forme $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$).
- Une fonction ϕ est une *fonction test* si elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et si elle est nulle hors d'un segment I_ϕ . On note \mathcal{D} l'ensemble de ces fonctions.
- Une fonction sommable sur tout segment est dite localement sommable (ou localement intégrable). On note $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.

1. Les applications suivantes de \mathcal{D} dans \mathbb{R} sont-elles des distributions? Pour répondre on vérifiera
- qu'elles sont définies pour toute application ϕ de l'ensemble des fonctions test \mathcal{D} ;
 - qu'elles sont linéaires;
 - la continuité sera admise.

$$T_1(\phi) = \int_0^1 \phi(t)dt ; T_2(\phi) = \int_0^1 |\phi(t)|dt ; T_3(\phi) = \int_0^{+\infty} t^2 \phi(t)dt$$

$$T_4(\phi) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\phi'(t)dt$$

On rappelle qu'une distribution T est *régulière* s'il existe une application f localement intégrable telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$

$$T(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f(t)dt$$

Parmi les T_i ci-dessus lesquelles sont régulières?

2. Les applications suivantes sont-elles des distributions sur \mathcal{D} ? Si oui, sont-elles régulières?

$$T_5(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n)$$

$$T_6(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0)$$

$$T_7(\phi) = \phi(a) + \phi'(b)$$

$$T_8(\phi) = \max(\phi(a), 0)$$

Notations :

- On notera souvent $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$ pour une distribution T et une fonction test ϕ .
- Si S est une distribution, on note σS la distribution symétrique définie par

$$\langle \sigma S, \phi \rangle = \langle S, \sigma \phi \rangle.$$

- Si S est une distribution et a un nombre réel, on note $\tau_a S$ la translatée de S définie par

$$\langle \tau_a S, \phi \rangle = \langle S, \tau_{-a} \phi \rangle.$$

3. Quelles sont les propriétés de l'ensemble des distributions sur \mathcal{D} ?

Une distribution S est dite *paire* si $\sigma S = S$ (resp. *impaire* si $\sigma S = -S$). Dans ce cas, quelle relation lie $\langle S, \phi(-t) \rangle$ et $\langle S, \phi(t) \rangle$, quelle que soit $\phi \in \mathcal{D}$?

4. **Rappel :** la *distribution de Dirac* est définie par :

$$\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0).$$

1. Déterminer la distribution $\delta_a = \tau_a \delta_0$ (notée abusivement $\delta(t - a)$).
2. **Rappel :** si S est une distribution et g une fonction, la *distribution "produit"* gS est définie par

$$\langle gS, \phi \rangle = \langle S, g(t)\phi(t) \rangle.$$

Calculer la distribution $g\delta_a$ de deux manières différentes.

5. **Rappel :** La *dérivée* T' d'une distribution T est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle.$$

1. Calculer δ'_a
2. Calculer $(gS)'$. Trouver une expression simplifiée de $g\delta'_a$. Calculer : $e^{at}\delta'$, $t\delta'$ et $t^2\delta'$.
3. Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{pour } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |t| > 1. \end{cases}$$

Soit $T = d(f)$ la distribution régulière associée à f . Calculer successivement T' , T'' et T''' .

4. Soit $f(t) = H(t) \sin t$. On note $T = d(f)$ la distribution régulière associée. Calculer T' et T'' .
5. Soit l'application f définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{pour } |t| \leq 1 \\ e^{1-|t|} & \text{pour } |t| > 1. \end{cases}$$

Soit $T = d(f)$ la distribution régulière associée à f . Calculer successivement T' , T'' et T''' .