

FICHE 1 - RAPPELS DE PROBABILITÉS

Exercice 1 *Pile ou face*

On lance une pièce bien équilibrée. Si elle tombe sur pile, on gagne 5 euros, sinon on perd 5 euros.

1. Donner une modélisation associée au lancer (c'est à dire, donner l'espace des réalisations Ω et la probabilité \mathbb{P} sur Ω).
2. Définir une variable aléatoire X qui modélise le jeu.
3. Rappeler la définition de l'espérance, de la variance, du moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) d'une variable aléatoire discrète, et calculer ces quantités pour X .
4. Que deviennent les réponses aux questions précédentes lorsque la pièce est truquée ?

Exercice 2 *Deux dés*

On lance deux dés non pipés, indépendants.

1. Définir un espace de probabilités pour modéliser l'expérience.
2. Définir des variables aléatoires X_1, X_2, S correspondant respectivement au résultat du premier, du deuxième dé, et à la somme de ceux-ci.
3. Quelle est la probabilité que le résultat du premier dé soit pair ?
4. Quelle est la probabilité que la somme des résultats des deux dés soit paire ?
5. Est-ce que les événements $A = \{X_1 \text{ est pair}\}$, $B = \{X_2 \text{ est pair}\}$ et $C = \{S \text{ est paire}\}$ sont indépendants a) deux à deux ? b) dans leur ensemble ?
6. Calculer la loi de S .

Exercice 3 *Pile ou face répété n fois, loi binomiale*

On lance n fois, de façon indépendante, la même pièce truquée. On s'intéresse au nombre de piles obtenus après ces lancers. Notons p la probabilité que la pièce tombe sur pile.

1. Définir un espace de probabilités modélisant ces n lancers.
2. Définir la variable aléatoire X qui donne le nombre de piles (on pourra introduire d'abord une suite de variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n bien choisies).
3. Montrer que, pour $k = 0, \dots, n$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X a) en utilisant la formule ci-dessus b) à l'aide de l'expression de X en fonction de Y_1, \dots, Y_n .

Exercice 4 *Pile ou face répété jusqu'à apparition de pile, loi géométrique*

On lance la pièce de monnaie truquée de l'exercice précédent jusqu'à obtention de pile.

1. Définir un espace de probabilités pour modéliser cette expérience (on ne précisera pas la probabilité), et une variable aléatoire N donnant l'instant d'apparition de pile pour la première fois.
2. Calculer la loi de N , puis son espérance et sa variance.

Exercice 5 *Sternes bretonnes, loi hypergéométrique*

Après une marée noire en Bretagne, l'organisme de protection des oiseaux a évalué à 20000 la population de sternes au large du Finistère. 500 d'entre elles ont alors été baguées. Peu après, on capture 100 sternes dans cette zone. Quelle est la probabilité :

1. de ne pas avoir d'oiseau bagué ?
2. d'avoir au moins deux oiseaux bagués ?