Université Claude Bernard LYON I
Année universitaire 2008-2009

L3 MASS - Modèles aléatoires

Fiche 2 - Espérance, indépendance

Exercice 1 *Manipulation des définitions*
1. Soit A et B deux événements indépendants. Montrer que A et B^c sont indépendants aussi.
2. On lance deux dés, on note X_1 et X_2 les résultats, et S leur somme. Démontrer que X_1 et S ne sont pas indépendantes.
3. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Écrire les formules permettant de calculer les quantités suivantes : $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X+1]$, $\mathbb{E}[3^X]$, $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$, $\mathbb{E}[X+Y]$, $\mathbb{E}[XY^2]$, $\mathbb{P}(X=Y)$, $\mathbb{P}(X \geq Y)$. Dans le cas où X et Y sont indépendantes, simplifier ces expressions lorsque cela est possible.

Exercice 2 *Fonctions indicatrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités discret. Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Pour des événements A et B, exprimer $\mathbf{1}_{A^c}$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Vérifier que, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$.
3. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements. On note N le nombre d'événements parmi ceux-ci qui se produisent. Exprimer N à l'aide de fonctions indicatrices, et en déduire une expression de $\mathbb{E}[N]$.

Exercice 3 *Covariance*
Soit deux variables aléatoires X et Y. On définit leur covariance par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

1. Montrer que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

et

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y).$$

2. Supposons X et Y indépendantes. Montrer $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Var}(X+Y)$?
3. Attention : la réciproque est fausse. Supposons que la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$ et que $Y = X^2$. Donner la loi de Y et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *Estimateur de la moyenne*
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne μ et de variance σ^2. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$.
2. Calculer $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.