Fiche 5 - Chaînes de Markov (mesures stationnaires, théorèmes limites)

Exercice 1 On considère la chaîne de Markov à trois états dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 1/5 & 1/2 & 3/10 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce bien une matrice de transition ? Classer les états de cette chaîne de Markov (transients, récurrents positifs, récurrents nuls).
2. Admet-elle une probabilité invariante ? Si oui, la calculer.
3. Écrire ce que donnent les théorèmes limites qui s'appliquent dans ce cas.

Exercice 2 *Classes sociales*
La matrice de transition ci-dessous décrit les probabilités pour qu'un enfant né dans un milieu parental de type U (upper class), M (middle-class) ou L (lower class) se retrouve, à l'âge adulte, avec une activité professionnelle relevant du type U, M ou L.

$$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible et apériodique.
2. On suppose qu'à la date $n = 0$ la proportion de la population relevant des classes de type U, M et L est respectivement de 20%, 70% et 10%. Que deviendra cette répartition après un nombre important de renouvellements de générations ?
3. Quelle devrait-être la répartition initiale (à la date $n = 0$) pour qu'au cours des générations suivantes cette répartition ne soit pas modifiée ?

Exercice 3 *Météo*
On considère une chaîne de Markov dont les états sont :

$x_1 = (1, 1)$: il a plu hier et aujourd'hui ;

$x_2 = (0, 1)$: il n'a pas plu hier et il a plu aujourd'hui ;

$x_3 = (1, 0)$: il a plu hier et il n'a pas plu aujourd'hui ;

$x_4 = (0, 0)$: il n'a pas plus hier ni aujourd'hui.

On sait par ailleurs que :

L'état x_1 implique qu'il pleuvra demain avec probabilité 0.7 ;

L'état x_2 implique qu'il pleuvra demain avec probabilité 0.5 ;

L'état x_3 implique qu'il pleuvra demain avec probabilité 0.4 ;

L'état x_4 implique qu'il pleuvra demain avec probabilité 0.2.

1. Explicitez la matrice de transition $P = (p(i,j))_{i,j=1,\ldots,4}$.
2. On suppose que x_1 est l'état du lundi et du mardi. Quelle est la probabilité qu'il pleuve le jeudi (de la même semaine) ?
3. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique. Calculer la probabilité stationnaire de cette chaîne.
4. Quelle est la proportion de journées sans pluie (calculée sur une longue période de temps) ?

Exercice 4 *Marche aléatoire sur un graphe*
On consière un graphe fini $G = (S, A)$: un ensemble S de sommets, et un ensemble A de paires de sommets, nommées arêtes. Pour $x, y \in S$, on note $x \sim y$ si $\{x, y\} \in A$. Le degré d'un sommet $x \in S$, noté $\deg(x)$, est le nombre de voisins de x, c'est-à-dire le nombre de sommets y tels que $y \sim x$. On suppose que, pour tout $x \in S$, $\deg(x) \geq 1$. On définit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états S de matrice de transition donnée par :

$$\text{pour tous } x, y \in S,\ p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pourquoi cela définit-il bien une matrice de transition ?
2. Donner des exemples de graphes où $(X_n)_{n\geq 0}$ est non irréductible, irréductible apériodique, irréductible de période 2. Est-il possible de trouver un exemple irréductible de période 3 ?
3. On considère la mesure π sur S donnée par $\pi(\{x\}) = \deg(x)$. Montrer que cette mesure est réversible. En déduire une probabilité stationnaire.
4. On suppose que la chaîne est irréductible. Partant de x, que vaut l'espérance du temps de retour en x ? Si de plus tous les sommets ont même degré, que peut-on dire sur la distribution de X_n ?
5. Application : sur un échiquier, on déplace une tour aléatoirement sur l'une des cases qui lui sont accessibles (chacune ayant même probabilité). Quel est le temps moyen de retour au point de départ ? Même question pour un cavalier. Dans ces deux exemples, quelle est la période ? Que pourrait-on dire dans le cas d'un fou ?

Exercice 5 *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$*
On considère la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition donnée par :

$$P^n(S_1 = n+1) = \frac{1}{2} = P^n(S_1 = n-1).$$

1. Vérifier qu'elle est irréductible. Vérifier que la mesure de comptage μ définie par $\mu(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ est réversible.
2. On admet que cette chaîne de Markov est récurrente. Est-elle récurrente positive ?