# Fourier, Laplace, Distributions et Applications

Yves GERARD

Math4-SPI: May 5, 2009

# Contents

# Chapter 1

# Filtre et convolution

## 1.1 $\mathcal{H}$ Fonction d'Heaviside (1850-1925)

On notera $\mathcal{H}$ une application définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

## 1.2 Exemple filtre RC

On note $\mathbf{e}$ la tension du signal électrique d'entrée, en fonction du temps $t$, appliquée aux bornes du circuit "RC" (R: résistance pure, C: capacité du condensateur) et $\mathbf{s}$ la tension de sortie mesurée aux bornes du condensateur. On considère $\mathbf{e}$ continue sur $\mathbb{R}$ et nulle pour les valeurs $t < 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}$ est donc intégrable sur $]-\infty, t[$, ce qui sera noté

$$\mathbf{e} \in \mathcal{L}^1(]-\infty, t], \mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(]-\infty, t])$$

$\mathbf{s}$ est solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{e} = \mathrm{RC}\mathbf{s}' + \mathbf{s}$$

et doit être nulle pour $t < 0$.

Par intégration, on obtient

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\mathrm{RC}} \int_0^t e^{-\frac{t-u}{\mathrm{RC}}} \mathbf{e}(u) du$$

$$(\text{i.e. } \mathbf{s}(t) = \frac{1}{\mathrm{RC}} \int_0^t e^{-\frac{t-u}{\mathrm{RC}}} \mathbf{e}(u) du \ )$$

En posant

$$h = \frac{1}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \mathcal{H}$$

$h$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on écrira plus simplement

$$\mathbf{s} = \mathbf{h} * \mathbf{e}$$

définissant ainsi $\mathbf{s}$ sous forme d'un "produit de convolution".

### 1.2.1 Exercice

Traiter le cas "RLC".

## 1.3 $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$

Dans la suite, sauf mention explicite, les application seront considérées définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

### 1.3.1 Remarques et rappels sur l'intégration

L'intégration élémentaire peut se prolonger de plusieurs manières.
Dans ce cours, nous utiliserons l'intégrale de Lebesgue sans la définir complètement.

### 1.3.2 Intégration de fonction continue et primitive

...

### 1.3.3 Fonctions $C^0$ par morceaux

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). On dit qu'une application $f$ définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est *continue par morceaux sur* $[a, b]$ et on note

$$f \in C^0_m([a, b], \mathbb{R})$$

s'il existe une subdivision finie $(a_i)_{i \in [0,n]}$ de $[a, b]$ de la forme

$$a = a_0 < \ldots < a_i < a_{i+1} \ldots < a_n = b$$

telle que $f \mid ]a_i, a_{i+1}[$, restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, soit prolongeable en une application continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour tout $i \in [0, n-1]$.

On peut aussi dire que $f$ est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points de discontinuité où $f$ admet une
limite finie à droite et une limite finie à gauche (ou seulement à droite pour $a$ et à gauche pour $b$).

Une application $f$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $I$ si $f$ l'est sur tout segment inclus dans $I$ et on note $f \in C^0_m(I, \mathbb{R})$.

Exemple $\mathcal{H}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

### 1.3.4 Intégrale d'une application continue par morceaux sur segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $f \in C^0_m([a, b], \mathbb{R})$. Si $(a_i)_{i\in[0,n]}$ est une subdivision de $[a, b]$ de la forme

$$a = a_0 < \ldots < a_i < a_{i+1} \ldots < a_n = b$$

et si $\bar{f}_i$ est le prolongement continu à $[a_i, a_{i+1}]$ de $f \mid ]a_i, a_{i+1}[$ , on appelle intégrale de $f$ sur $[a, b]$ la valeur

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (\int_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{f}_i)$$

qui ne dépend pas de la subdivision choisie comme ci-dessus.

### 1.3.5 Intégrale d'une application continue sur segment et à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

1. Soit $f \in C^0(]c, b], \mathbb{R}_+)$ une application telle que

$$\lim_c f = \infty$$

Si, pour une suite $(c_n)$ tendant vers $c$, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[c_n, b]} f$$

existe, elle ne dépend pas de la suite $(c_n)$. On pose alors

$$\int_{]c,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[c_n,b]} f$$

et, si $\int_{]c,b]} f$ est fini, $f$ est dite **intégrable** sur $]c,b]$ et on note

$$f \ \in \mathcal{L}^1(]c,b],\mathbb{R})$$

Si on considère que $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, f est alors définie et continue sur $[c,b]$ avec

$$f(c) = \infty$$

En posant

$$0 * \infty = 0$$

on a

$$\int_{[c,c]} f = f(c)(c-c) = 0$$

et $\int_c^b f$ désigne alors

$$\int_{[c,b]} f = \int_{[c,c]} f + \int_{]c,b]} f = \int_{]c,b]} f$$

Par exemple

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \mid_0^1 = 2$$

2. On définit de même par limite à gauche de $c$

$$\int_{[a,c[} f$$

pour une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ et définie et continue sur $[a,c[$

### 1.3.6 $\mathcal{C}_{pm}$

L'intégrale de Lebesgue s'étend à une grande classe d'applications discontinues, définies sur un intervalle quelconque $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ formant l'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \bar{\mathbb{R}})$.
Nous nous intéresserons essentiellement à des applications $f$ définies sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle quelconque $I$ de $\mathbb{R}$), à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ et n'ayant, au plus, dans tout segment, qu'un nombre fini de discontinuités
(i.e. à droite ou à gauche d'un point $a$ de discontinuité, $f$ a une limite finie ou infinie ou bien n'a pas de limite).

Nous noterons $\mathcal{C}_{\mathbf{pm}}(I)$ (ou $\mathcal{C}_{\mathbf{pm}}$ sans précision s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $I$) l'ensemble (l'addition dans $\mathcal{C}_{\mathbf{pm}}(I)$ n'est pas nécessairement définie) de ces applications et pour $f \in \mathcal{C}_{pm}$ **on dira, en un sens restreint dans ce cours, que $f$ est presque continue par morceaux sur $I$**
**Dans la suite de ce cours, sauf mention expresse du contraire, toutes les applications seront supposées appartenir à $\mathcal{C}_{pm}$**

Avec l'intégrale de Lebesgue et pour de telles applications dans $\mathcal{C}_{pm}$, nous utiliserons les définitions et résultats suivants en notant $I$ et $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$

1. Si, sur $I$,
$$f = f_+ - f_-, \text{ avec } f_+ \geq 0, \ f_- \geq 0$$
on pose
$$\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-$$
et on dit que $f$ est intégrable sur $I$ (noté $f \in \mathcal{L}^1(I)$) si (et seulement si) $f_+$ et $f_-$ le sont.

Par exemple si
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
alors
$$\int_{-1}^{1} f = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx + \int_0^1 \ln x dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = -2\sqrt{-x} \mid_{-1}^{0} = 2$$

$$\int_{0}^{1} \ln x dx = (x \ln(x) - x) \mid_{0}^{1} = -1$$

2. $f \geq 0$ sur $I$ implique $\int_I f \geq 0$
3. L'intégration est linéaire et donc croissante.
4. $\mid \int_I f \mid \leq \int_I \mid f \mid$
5. Si, sur $I$, $f \in \mathcal{C}_{pm}$ est **dominée** par une application intégrable $g \in \mathcal{C}_{pm}$ sur $I$ :
$$\mid f \mid \leq \mid g \mid$$
i.e. si, en tout point $x \in I$ où $f$ et $g$ sont continues, on a
$$\mid f(x) \mid \leq \mid g(x) \mid$$
alors $f$ est aussi intégrable sur $I$

   Exemple.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$x \mapsto \exp(-x^2)\cos(2tx)$$
   est intégrable sur $\mathbb{R}$
6. Si $f$ est intégrable sur $I$, elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$
7. Si
$$I \cap J = \emptyset$$
alors
$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f$$
8. $$f \in \mathcal{L}^1(I) \leftrightarrow \mid f \mid \in \mathcal{L}^1(I)$$

### 1.3.7 $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$

Si $f$ est une application définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$f = \mathcal{R}e(f) + \mathrm{i}\mathcal{I}m(f)$$

on dit qu'elle est intégrable si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ le sont et on pose

$$\int_I f = \int_I \mathcal{R}e(f) + \mathrm{i} \int_I \mathcal{I}m(f)$$

L'ensemble des applications intégrables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera noté

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Les résultats précédents, sauf la croissance, s'étendent aux applications à valeurs dans $\mathbb{C}$ et, en pratique dans la plupart des cas, nous n'aurons pas besoin de considérer des applications à valeurs dans

$$\bar{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\bar{\mathbb{R}}$$

### 1.3.8 Principaux théorèmes dans $\mathcal{C}_{pm}$

1. **Convergence dominée de Lebesgue**

   Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}_{pm}(I)$ convergeant simplement vers $f$ sur $I$.
   Si chaque $f_n$ est dominée sur $I$ par une application $g$ intégrable sur $I$, alors $f$ est intégrable sur $I$ et

   $$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n = \int_I f$$

   (a) **Corollaire:**
   Si $f$ est une application (Lebesgue-)intégrable sur l'intervalle $(a, b)$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ , alors

   $$\lim_{x \to b} \int_a^x f = \int_a^b f$$

   Prendre garde au fait que, si $f$ est non positive, $\lim_{x \to b} \int_a^x f$ peut exister et être finie, même si $f$ est non (Lebesgue-)intégrable sur l'intervalle $(a, b)$.

(b) **Exemple:**
Soit $\phi$ une application définie et bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et soit

$$f_n = n^2 t e^{-nt} \mathcal{H}$$

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément car $f_n$ atteint son maximum en $\frac{1}{n}$ qui est

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{n}{e}$$

Avec le changement de variable

$$u = nt$$

on voit que $f_n.\phi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.\phi = \phi(0)$$

2. **Intégration par partie dans le cas $C^1$**
Soit $I = (a, b)$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$. Soient deux applications $f$ et $g$ dans $C^1(I, \mathbb{R})$ telles que $f.Dg$ et $Df.g$ soient intégrables sur $I$ et telles que les limites $\lim_a(fg)$ et $\lim_b(fg)$ existent (dans $\bar{\mathbb{R}}$), alors on a

$$\int_I f.Dg = \lim_b(fg) - \lim_a(fg) - \int_I Df.g$$

(sous réserve de forme indéterminée dans la différence des limites).

- **Exemple:**
Soit $f \in C^1(]0, +\infty[)$, ayant une limite finie à droite $f(0+)$ en 0 et telle que $f$ et $Df$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.
Si $\phi \in C^1(]0, +\infty[)$ est nulle en dehors d'un segment ("à support borné"), alors on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}.f.D\phi = f(0+)\phi(0) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}.Df.\phi$$

3. **Fubini**
   Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application
$$f : I \times J \to \mathbb{R}$$
   Si
$$\int_I (\int_J \mid f(x,y) \mid dy)dx$$
   est fini (ou symétriquement pour $I$ et $J$) alors $f$ est intégrable sur $I \times J$ et on a
$$\int_{I\times J} f = \int_I (\int_J f(x,y)dy)dx = \int_J (\int_I f(x,y)dx)dy$$
   - **Exemple d'application:**
     Pour calculer
$$G = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}dx$$
     on peut poser
$$H = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}dx$$
     et on obtient
$$H = G^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. **Continuité d'intégrale à paramètre**
   Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in J$, $K$ un intervalle ouvert contenant $x_0$ et inclus dans $J$
   et soit une application
$$f : I \times J \to \mathbb{R}$$
   Si, pour tout $t \in I$, $f(t,.)$ est continue en $x_0$
   et s'il existe une application intégrable sur $I$ qui domine $f(.,x)$ pour tout $x \in K$, alors $\int_I f(t,.)dt$ est continue en $x_0$

5. **Dérivation d'intégrale à paramètre**
   Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in J$, $K$ un intervalle ouvert contenant $x_0$ et inclus dans $J$
   et soit une application
$$f : I \times J \to \mathbb{R}$$

Si, pour tout $t \in I$, $f(t,.) \in C^1(K)$ et s'il existe une application intégrable sur $I$ qui domine $D_2 f(.,x)$ pour tout $x \in K$, alors

$$D(\int_I f(t,.)dt)(x_0) = \int_I D_2 f(t,x_0)dt$$

Exemple:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)\cos(2tx)\mathcal{H}(t)dt$$

est dérivable et on a

$$Df(x) = -2xf(x)$$

d'où on en déduit

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

## 1.4 $\mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

### 1.4.1 $\mathrm{L}^1$

Dans la suite, on ne distinguera pas $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ de l'application nulle si

$$\int_{\mathbb{R}} f = 0$$

La relation

$$f \equiv g \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mid f - g \mid = 0$$

est une relation d'équivalence.
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ possède une propriété vérifiée par toute application dans sa classe d'équivalence $cl(f)$, on écrira

$$f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

en identifiant $f$ à sa classe.
Pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, si l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$$

est dénombrable, $f$ et $g$ sont dans la même classe.

**Remarque:**
$L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est en fait mathématiquement l'ensemble des classes d'équivalence; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$):

$$cl(f+g) = cl(f) + cl(g)$$
$$cl(\lambda f) = \lambda cl(f))$$

et $L^1$ est ainsi muni d'une norme

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} | f |$$

# 1.5 Convolution et filtre

## 1.5.1 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du$$

$f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et le produit de convolution donne une application

$$L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$$

symétrique, bilinéaire, vérifiant

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \,.\, \|g\|_1$$

(ce qui exprime une continuité du produit de convolution)

## 1.5.2 RC et filtre

RC est un filtre particulier

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{s} = \mathbf{h} * \mathbf{e}$$

défini par l'application

$$h = \frac{1}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \mathcal{H}$$

Plus généralement, si $h \in L^1(\mathbb{R})$, l'application $\Phi_h : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$

$$f \mapsto \Phi_h(f) = h * f$$

a les propriétes suivantes

**(P1)** $\Phi_h$ est linéaire

**(P2)** $\Phi_h$ est invariante par translation.
Si, pour $a \in \mathbb{R}$ on note $\tau_a$ l'opérateur retard

$$f \mapsto \tau_a(f)$$

défini par

$$\tau_a(f) : t \mapsto f(t-a)$$

on a la relation générale entre $*$ et $\tau_a$

$$f * \tau_a(g) = \tau_a(f * g) = \tau_a(f) * g$$

Alors, dans notre cas, la commutation

$$\tau_a \circ \Phi_h = \Phi_h \circ \tau_a$$

exprime l'invariance par translation de $\Phi_h$

### 1.5.3 Filtre général

Un opérateur $\Phi$ vérifiant les propriétés (P1) et (P2) s'appelle un filtre s'il est continu en un sens à définir.
Par exemple, pour le filtre RC, si l'application $\mathbf{e}$ est causale, on a

$$\|\mathbf{h} * \mathbf{e}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \|\mathbf{e}\|_{\infty,\mathbb{R}}$$

D'après ce qui précède (cf. 1.5.1), $\Phi_h$ est toujours continu pour la norme $\| \ \|_1$

## 1.6 Autres opérateurs. Notations

### 1.6.1 $D$

$D$ sera l'opérateur de dérivation.

### 1.6.2 $\sigma$ opérateur de symétrie

$$f \mapsto \sigma(f)$$

défini par

$$\sigma(f) : t \mapsto f(-t)$$

### 1.6.3 $h_r$ opérateur d'homothétie

Pour $r \in \mathbb{R}$,

$$f \mapsto h_r(f)$$

défini par

$$h_r(f) : t \mapsto f(rt)$$

### 1.6.4 $[.]$ opérateur de mutiplication

Pour une application $g$ définie sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $[g]$ est défini par

$$f \mapsto [g](f) = g.f$$

i.e. par

$$[g](f) : t \mapsto g(t)f(t)$$

### 1.6.5 Exercice

1. $$h_a\sigma = h_{-a} = \sigma h_a$$

2. $$(h_a)^2 = h_{a^2}$$

3. Si $a \neq 0$
$$(h_a)^{-1} = h_{a^{-1}}$$

# Chapter 2

# Transformation de Fourier

## 2.1 Rappel: approximation par séries de Fourier

## 2.2 Transformation de Fourier

On rappelle que, dans ce cours et en particulier dans ce chapitre, les applications sont a priori dans $\mathcal{C}_{\mathbf{pm}}$ et, pour $f \in \mathcal{C}_{\mathbf{pm}}$ et $g \in \mathcal{C}_{\mathbf{pm}}$,

$$f = g$$

signifie

$$f(x) = g(x)$$

en tout point $x$ où $f$ et $g$ sont continues.

### 2.2.1

Soit $\Omega$ un réel.
Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, C)$, on pose

$$\mathcal{F}_\Omega(f) = \int_R f.e^{-i\Omega\nu t}dt$$

i.e.

$$(\mathcal{F}_\Omega(f))(\nu) = \int_R f(t).e^{-i\Omega\nu t}dt$$

Dans la suite, $\Omega$ prendra les valeurs

$$\Omega = \pm 1, \pm 2\pi$$

En particulier, si

$$\Omega = 2\pi$$

la notation traditionnelle est

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2\pi}$$

i.e

$$\mathcal{F}(f) = \int_R f.e^{-i2\pi\nu t}dt$$

et $\mathcal{F}_{-2\pi}$ est en général noté $\bar{\mathcal{F}}$

### 2.2.2

$\mathcal{F}_\Omega$ est une application linéaire injective sur $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
$\mathcal{F}_\Omega(f)$ est une application définie et continue dans $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 à l'infini et, en particulier, $\mathcal{F}_\Omega(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais $\mathcal{F}_\Omega(f)$ n'est pas nécessairement intégrable

$$\mathcal{F}_\Omega(L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})) \not\subset L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

## 2.3 Application au filtre RC

Si on applique Fourier à

$$\mathbf{e} = \mathrm{RC}\mathbf{s}' + \mathbf{s}$$

on obtient

$$\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{e}) = (\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1)\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{s})$$

D'òu la valeur de $\mathbf{s}$ définie formellement, à ce niveau du cours, comme antécédent

$$\mathbf{s} = \mathcal{F}_\Omega^{-1}(\frac{\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{e})}{\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1})$$

## 2.4 Convolution et Fourier

Pour $f, g \in L^1$, une propriété fondamentale de la transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}_\Omega(f * g) = \mathcal{F}_\Omega(f).\mathcal{F}_\Omega(g)$$

(égalité d'applications définies sur tout $\mathbb{R}$)

et si, de plus, $\mathcal{F}_\Omega(f) \in L^1$ et $\mathcal{F}_\Omega(g) \in L^1$ alors $fg \in L^1$ et on a

$$\mathcal{F}_\Omega(fg) = \frac{|\Omega|}{2\pi}\ \mathcal{F}_\Omega(f) * \mathcal{F}_\Omega(g)$$

(égalité encore vraie sur tout $\mathbb{R}$)

## 2.5 Transmittance d'un filtre

Dans le cas d'un filtre sous la forme

$$\mathbf{s} = \mathbf{h} * \mathbf{e}$$

on obtient

$$\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{s}) = \mathcal{F}_\Omega(\mathbf{h}).\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{e})$$

$\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{h})$ est appelée la fonction de transfert ou transmittance.

Dans le cas "RC", d'après ce qui précède, on obtient la formule

$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}\mathcal{H}) = \frac{1}{\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1}$$

On remarquera

$$\frac{1}{\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1} \notin L^1(\mathbb{R}, C)$$

## 2.6 Formulaire

### 2.6.1

Pour $a \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$

$$\sigma \circ \mathcal{F}_\Omega = \mathcal{F}_{-\Omega} = \mathcal{F}_\Omega \circ \sigma$$

$$\mathcal{F}_\Omega \circ [e^{i\Omega a t}] = \tau_a \circ \mathcal{F}_\Omega$$

$$\mathcal{F}_\Omega \circ \tau_a = [e^{-i\Omega\nu a}] \circ \mathcal{F}_\Omega = (e^{-i\Omega\nu a}.\mathcal{F}_\Omega)$$

$$\mathcal{F}_\Omega \circ h_r = \frac{1}{|r|} h_{\frac{1}{r}} \circ \mathcal{F}_\Omega$$

$$D \circ \mathcal{F}_\Omega = \mathcal{F}_\Omega \circ [-i\Omega t]$$

Et, si on se restreint à des applications $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec $f$ et $Df$ intégrables sur $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_\Omega \circ D = [i\Omega\nu] \circ \mathcal{F}_\Omega = (i\Omega\nu.\mathcal{F}_\Omega)$$

### 2.6.2

$$\mathcal{F}_\Omega = h_{\frac{\Omega}{2\pi}} \circ \mathcal{F}_{2\pi} = \left(\frac{2\pi}{|\Omega|}\right) \mathcal{F}_{2\pi} \circ h_{\frac{2\pi}{\Omega}}$$

### 2.6.3

Sur l'ensemble des applications $f \in L^1(\mathbb{R})$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\mathcal{F}_\Omega(f) \in L^1(\mathbb{R})$ on a les formules

1.
$$\mathcal{F}_\Omega \circ \mathcal{F}_\Omega = \left(\frac{2\pi}{|\Omega|}\right) \sigma$$

$$(\mathcal{F}_\Omega)^{-1} = \left(\frac{|\Omega|}{2\pi}\right) \mathcal{F}_{-\Omega}$$

2. En particulier, si
$$\Omega = \pm 2\pi$$
On a alors
$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_{-2\pi}$$
et
$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \sigma$$

3. Si
$$\Omega = \pm 1$$
on a alors
$$(\mathcal{F}_1)^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}$$
et
$$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_1 = 2\pi\sigma$$

### 2.6.4

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(a) > 0$, la formule obtenue dans le cas "RC" se généralise facilement
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{t^k}{k!}e^{-at}\mathcal{H}) = \frac{1}{(a+i\Omega\nu)^{k+1}}$$
De cette formule et de ce qui précède, on déduit
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{t^k}{k!}e^{at}\sigma(\mathcal{H})) = \frac{(-1)^k}{(a-i\Omega\nu)^{k+1}} = -\frac{1}{(i\Omega\nu-a)^{k+1}}$$
$$\mathcal{F}_\Omega(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{\Omega^2\nu^2+a^2}$$
$$\mathcal{F}_\Omega(\mathrm{sgn}(t)e^{-a|t|}) = \frac{-2i\Omega\nu}{\Omega^2\nu^2+a^2}$$
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{a}{(\Omega^2t^2+a^2})) = \frac{\pi}{|\Omega|}e^{-a|\nu|}$$
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{t^2+a^2}) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\Omega\nu|}$$
Et pour $k > 0$
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{(i\Omega t+a)^{k+1}}) = \frac{2\pi}{|\Omega|}\frac{(-1)^k\nu^k}{k!}e^{a\nu}\sigma(\mathcal{H})$$
$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{(a-i\Omega t)^{k+1}}) = \frac{2\pi}{|\Omega|}\frac{\nu^k}{k!}e^{-a\nu}\mathcal{H}$$

### 2.6.5

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathcal{F}_\Omega(e^{-at^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\Omega^2}{4a}\nu^2}$$

En particulier, pour $\Omega = 2a = 2\pi$

$$\mathcal{F}(e^{-\pi t^2}) = e^{-\pi\nu^2}$$

### 2.6.6

Avec le sinus cardinal $\sin_c$ défini par

$$\sin_c(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

et $\chi_a$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-a, a]$, on a

$$\mathcal{F}_\Omega(\chi_a) = 2a \sin_c(a\Omega\nu)$$

En particulier, pour $a = \frac{1}{\Omega}$

$$\mathcal{F}_\Omega(\chi_{\frac{1}{\Omega}}) = \frac{2}{\Omega} \sin_c$$

et, pour $\Omega = 2\pi, a = \frac{1}{2\pi}$

$$\mathcal{F}(\chi_{\frac{1}{2\pi}}) = \frac{1}{\pi} \sin_c$$

## 2.7 Fourier en dimension $n$

### 2.7.1 Définitions

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n, C)$, on pose

$$\mathcal{F}_\Omega(f) = \int_{R^n} f.e^{-i\Omega<\nu,t>} dt$$

($< \nu, t >$ : produit scalaire euclidien canonique).

### 2.7.2 Exercice

La transformée de Fourier en dimension $n$ garde des propriétés analogues. Etendre les précédentes formules à la dimension $n$.

# Chapter 3

# Transformation de Laplace

## 3.1 Causalité

Une application intégrable sur tout segment est dite **localement intégrable sur** $\mathbb{R}$. C'est le cas, par exemple, d'une application continue sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathbf{L^1_{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des applications localement intégrables.
On a $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

**Dans** $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une application $f$ est dite **causale** si $f(t) = 0$ pour $t < 0$

On notera $\mathbf{\Lambda_0}$ l'espace de ces applications localement intégrables et causales et, **dans ce chapitre, toutes les applications sont supposées appartenir à** $\Lambda_0$.

## 3.2 Laplace

**Si** $f \in \Lambda_0$, on définit l'intervalle de $\mathbb{R}$

$$I_f = \{\zeta \in \mathbb{R} \mid e^{-\zeta t} f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})\}$$

**Si** $I_f$ **n'est pas vide, alors on définit la transformée de Laplace** $\mathcal{L}(f)$ **de l'application** $f$ **en posant**

$$z = \zeta + i\nu$$

et

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{F}_1(e^{-\zeta t} f)(\nu)$$

**i.e.**
$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} f(t)dt$$
En particulier, si $f \in L^1$, la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'axe imaginaire pur redonne la transformation de Fourier.
$\mathcal{L}$ est linéaire et injective.
Considérée comme fonction de la variable complexe $z$, $\mathcal{L}(f)$ est dérivable dans l'intérieur de la bande $I_f \times \mathbb{R}$
En écrivant cet intérieur sous la forme
$$\{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e(z) > \zeta_0\}$$
$\zeta_0(f) = \zeta_0$ s'appelle **l'abscisse d'intégrabilité** de $\mathcal{L}(f)$.
Les formules qui suivent, sans précision, doivent s'entendre comme valable sur une bande ad hoc.

S'il existe $t_0$, $K > 0$, et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour $t \geq t_0$
$$\mid f(t) \mid \leq Ke^{at}$$
alors $I_f$ n'est pas vide, et l'application $f$ possède une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$.

Traditionnellement, l'application
$$f \mapsto \mathcal{L}(f)$$
se note
$$\mathbf{f} \supset \mathcal{L}(\mathbf{f})$$
L'abscisse d'intégrabilité s'appelle aussi de "convergence absolue" ou encore de "sommabilité".
Dans la pratique, la dérivation de Laplace restreinte à la variable réelle peut souvent suffire.

## 3.3 Laplace et dérivation

### 3.3.1 $\mathcal{L} \circ D$

Si $f$ est $C^1$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(0^+)$ existe on a, pour $\mathcal{R}e(z) > 0$)
$$\mathcal{L}(Df) = z\mathcal{L}(f) - f(0^+)$$

### 3.3.2 $D \circ \mathcal{L}$

Pour $n \in$N, on a

$$D^n \circ \mathcal{L} = (-1)^n \mathcal{L} \circ [t^n]$$

## 3.4 Composition

### 3.4.1

Pour $c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L} \circ [e^{ct}] = \tau_c \circ \mathcal{L}$$

(sur le domaine $\mathcal{R}e(z) > \zeta_0 + \mathcal{R}e(c)$)

### 3.4.2

Pour $a \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{L} \circ \tau_a = [e^{-az}] \circ \mathcal{L}(= e^{-az}.\mathcal{L})$$

### 3.4.3

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathcal{L} \circ h_a = \frac{1}{a} h_{\frac{1}{a}} \circ \mathcal{L}$$

## 3.5 Convolution

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

## 3.6 $\mathcal{L}(t^n \mathcal{H})$

Pour $n \in N$

$$\mathcal{L}(t^n \mathcal{H}) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

($\mathcal{R}e(z) > 0$)

## 3.7 $\mathcal{L}(\mathcal{H}e^{ct})$

$c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}e^{ct}) = \frac{1}{z-c}$$

$(\mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(c))$
On en déduit

### 3.7.1

$\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}\sin\omega t) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$$

$(\mathcal{R}e(z) > 0)$

### 3.7.2

$\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}\cos\omega t) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

$(\mathcal{R}e(z) > 0)$

### 3.7.3

$c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}\sinh ct) = \frac{c}{z^2-c^2}$$

$(\mathcal{R}e(z) > |\mathcal{R}e(c)|)$

### 3.7.4

$c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}\cosh ct) = \frac{z}{z^2-c^2}$$

$(\mathcal{R}e(z) > |\mathcal{R}e(c)|)$

# Chapter 4

# Distribution, dérivation et convolution

## 4.1 Impulsion unité et Dirac

Dans l'exemple d'un filtre de convolution tel que "RC"

$$\mathbf{s} = \mathbf{h} * \mathbf{e}$$

on peut vouloir chercher s'il existe un élément neutre pour la convolution, noté $\delta$, qui en entrée du filtre donnerait en sortie

$$\mathbf{s} = \mathbf{h} * \delta = \mathbf{h}$$

appelée "réponse impulsionnelle".
Un tel élément devrait modéliser une impulsion unité concentrée à l'origine des temps i.e. devrait être la "limite" de suites d'applications définies sur $\mathbb{R}$ telles que, par exemple, la suite $(f_n)_n$ de mesure constante $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\frac{1}{2n} \\ n & \text{si } -\frac{1}{2n} < t < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } t > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

La suite $(f_n)$ converge simplement vers 0, sauf en 0 où elle converge vers $\infty$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n) = 0$$

Ainsi, $\delta$ ne peut pas être considérée comme une application, limite de la suite $(f_n)_n$, sous peine d'avoir une mesure nulle.

## 4.2 Distribution

### 4.2.1 $\mathcal{D}, L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Le développement en série de Fourier nous a montré que certaines applications de période $T$ étaient définies par leurs valeurs

$$\int_T f.e^{-in\omega t}$$

Nous allons donc identifier $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à une forme linéaire $d(f)$

$$d(f) : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f.\phi$$

à condition d'avoir assez d'applications "test" $\phi$ telles que $f.\phi$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
On prend pour ensemble test l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ formé des applications, à valeurs complexes,
qui sont nulles en dehors d'un segment -pour avoir beaucoup de formes linéaires de type $d(f)$-
et qui sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ -pour avoir de bonnes propriétés de dérivation par "dualité".

L'application linéaire définie sur $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$f \mapsto d(f)$$

est injective et permet d'identifier $f$ et $d(f)$.

De par le choix de la définition de $\mathcal{D}$, on peut définir $d(f)$ pour $f$ dans l'espace vectoriel $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ formé des applications définies sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur tout segment ( ce qui, par exemple, donne du sens à $d(\mathcal{H})$).
$d(f)$ est dite **distribution régulière** associée à $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et sera aussi notée

$$T_f$$

### 4.2.2 Exercice

Exemple de fonction test

$$\phi = e^{-\frac{1}{1-t^2}}.\chi_{]-1,1[}$$

### 4.2.3 $\mathcal{D}'$

$T_f$ est continue au sens suivant:
Pour tout segment $S$, et toute suite $(\phi_n)_n$, d'applications dans $\mathcal{D}$, nulles en dehors de $S$ et qui convergent uniformément vers 0,
$\mid \int_{\mathbb{R}} f.\phi_n \mid$ doit tendre aussi vers 0 car

$$\mid \int_{\mathbb{R}} f.\phi_n \mid \leq \int_S \mid f \mid . \mid \phi_n \mid \leq \|\phi_n\|_{\infty,S}. \int_S \mid f \mid$$

Plus généralement, une distribution sera une forme linéaire qui vérifie la propriété précédente en supposant de plus que toute les suites dérivées $(D^k(\phi_n))_n$ convergent aussi uniformément vers 0.
L'espace vectoriel des distributions sera noté $\mathcal{D}'$.
Dans la pratique, la plupart des distributions seront dérivées de $\delta$ ou seront associées à des applications.
On écrira dans la suite

$$d(f)(\phi) = < d(f), \phi >$$

pour utiliser commodément l'application bilinéaire

$$(f, \phi) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f.\phi$$

et, plus généralement pour une distribution $T$ on écrira

$$T(\phi) = < T, \phi >$$

## 4.3 Dirac et Distribution

On définit la distribution $\delta$ par la forme linéaire sur $\mathcal{D}$

$$\delta : \phi \mapsto \phi(0)$$

qui est bien continue car on a

$$\mid \phi(0) \mid \leq \|\phi_n\|_{\infty,S}$$

pour suite $(\phi_n)_n$, d'applications dans $\mathcal{D}$, nulles en dehors de $S$ et qui convergent uniformément vers 0.

On peut considérer que $\delta$ est limite dans $\mathcal{D}'$ de la suite $(f_n)$ de mesure constante définie précédemment en vérifiant que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} < f_n, \phi >=< \delta, \phi >$$

$\delta$ est aussi limite dans $\mathcal{D}'$ de la suite $(g_n)$

$$g_n = n^2 t e^{-nt} \mathcal{H}$$

étudiée dans le premier chapitre.

## 4.4 Extension de la convolution

Si $f$ et $g$ sont des éléments de $L^1$ et $\phi$ un élément de $\mathcal{D}$, on a

$$< f * g, \phi >= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt).\phi(x)dx$$

ou encore, par changement de variable,

$$< f * g, \phi >= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\phi(y+z)dydz$$

i.e.

$$< f * g, \phi >=< f(y), < g(z), \phi(y+z) >>$$

Plus généralement pour deux distributions $T$ et $U$, quand cela a du sens, on pose

$$< T * U, \phi >=< T_y, < U_z, \phi(y+z) >>$$

pour $\phi \in \mathcal{D}$
On a

$$T * U = U * T$$

et $\delta$ est bien élément neutre de la convolution

$$T * \delta = T$$

Il y a trois cas importants où le produit de convolution est bien défini

1. $$\mathcal{D} * \mathcal{D}' \subset C^\infty$$

2.

$$\mathcal{E}' * \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$$

Une distribution $T$ est dite à support borné s'il existe $K > 0$ tel que

$$< T, \phi >= 0$$

si $\phi \in \mathcal{D}$ est nulle dans $[-K, +K]$.

On note alors $\mathcal{E}'$ le sous-espace de ces distributions à support borné.
Par exemple, $\delta \in \mathcal{E}'$ et son support est $\mathrm{supp}(\delta) = \{0\}$

Le produit de convolution est associatif

$$(S * T) * U = S * (T * U)$$

si au moins deux des distributions sont à support borné.

3.

$$\mathcal{D}'_+ * \mathcal{D}'_+ \subset \mathcal{D}'_+$$

Une distribution $T$ est dite à support limité à gauche, s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$< T, \phi >= 0$$

si $\phi \in \mathcal{D}$ est nulle dans $[K, \infty]$.
On se restreint souvent à $K = 0$

On note alors $\mathcal{D}'_+$ le sous-espace de ces distributions à support limité à gauche.

Le produit de convolution dans $\mathcal{D}'_+$ est encore associatif.
Avec l'addition et la convolution $\mathcal{D}'_+$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative et sans diviseur de zéro.

## 4.5 Dérivation et convolution

### 4.5.1 Définition

Si $f \in C^1$, par intégration par parties, on a pour $\phi \in \mathcal{D}$

$$< D(f), \phi >= -\int_{\mathbb{R}} f.D(\phi) = - < f, D(\phi) >$$

Par définition, si $T$ est une distribution, elle sera donc dérivable et sa dérivée $DT$ sera définie par

$$< D(T), \phi >= - < T, D(\phi) >$$

La dérivation est évidemment linéaire et on a, pour deux distributions

$$D(T * U) = T * DU = DT * U$$

### 4.5.2 $D\mathcal{H}$

On a

$$D\mathcal{H} = \delta$$

### 4.5.3 $\delta'$ et dérivation

Si $T$ est une distribution on a donc

$$DT = T * \delta'$$

### 4.5.4 Application à RC

La recherche de $\mathbf{s}$ solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{e} = \mathrm{RC}\mathbf{s}' + \mathbf{s}$$

peut se remplacer par celle d'une inversion pour la convolution.
En effet, l'équation dans $\mathcal{D}'$ s'écrit

$$\mathbf{e} = A * \mathbf{s}$$

avec $A \in \mathcal{E}'$ définie par

$$A = \delta + \mathrm{RC}\delta'$$

et $s \in \mathcal{D}'_+$ si on cherche une solution nulle pour $t < 0$.

Si $A$ a un inverse pour la convolution noté $A^{*-1}$ on pourra écrire

$$\mathbf{s} = A^{*-1} * \mathbf{e}$$

et dans les cas où on saura prolonger la transformé de Fourier on pourra calculer $\mathbf{s}$ par l'intermédiaire

$$\mathcal{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{e})}{\mathcal{F}(A)}$$

### 4.5.5 $D(\mathcal{H}.f)$

Soit $f \in C^1(]0, +\infty[)$, ayant une limite finie à droite $f(0+)$ en 0 et telle que $f$ et $Df$ soient intégrables sur $]0, +\infty[$.
Si $\phi$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors la formule vue précédemment (cf 1.3.8.-2)

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}.f.D\phi = f(0+)\phi(0) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}.Df.\phi$$

se traduit dans $\mathcal{D}'$ par

$$D(T_{\mathcal{H}.f}) = f(0+)\delta + T_{\mathcal{H}.Df}$$

où $Df$ est la dérivée usuelle de l'application $f$, non définie en 0.
Symétriquement, en posant

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_\sigma$$

on obtiendrait à gauche dans $\mathcal{D}'$

$$D(\mathcal{H}_\sigma.f) = -f(0-)\delta + \mathcal{H}_\sigma.Df$$

en identifiant applications et distributions associées.

Plus généralement dans $\mathcal{D}'$, pour un saut de $f$ en 0, en écrivant

$$T_f = \mathcal{H}.f + \mathcal{H}_\sigma.f$$

on a

$$D(T_f) = (f(0+) - f(0-))\delta + Df$$

et, par translation pour un saut en $a$

$$D(T_f) = (f(a+) - f(a-))\delta + Df$$

### 4.5.6 RC et conditions initiales

Sans la condition $\mathbf{e}$ nulle pour $t < 0$, la recherche d'une $\mathbf{s}$ solution de l'équation différentielle vérifiant seulement pour $t > 0$

$$\mathbf{e}(t) = \mathrm{RC}\mathbf{s}'(t) + \mathbf{s}(t)$$

peut se faire en définissant les distributions

$$T = \mathcal{H}.\mathbf{s}$$

et

$$U = \mathcal{H}.\mathbf{e}$$

qui vérifient

$$U = \mathrm{RC}\mathcal{H}.D\mathbf{s} + T$$

i.e

$$U = \mathrm{RC}(DT - (\mathbf{s}(0+)\delta + T$$

Comme dans une remarque précédente, on pourrait résoudre avec la transformée de Fourier, à condition de l'étendre à ce type de cas dans les distributions.

### 4.5.7 $D(f.T)$

Si $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $T$ une distribution, pour généraliser le produit de deux applications, $fT$ est la distribution définie par

$$< fT, \phi > = < T, f.\phi >$$

et dans $\mathcal{D}'$, on peut écrire

$$D(fT) = Df.T + f.DT$$

Par exemple

$$D(f\mathcal{H}) = Df.\mathcal{H} + f.\delta = Df.\mathcal{H} + f(0)\delta$$

## 4.6 $\delta_a$

L'impulsion de Dirac en $a \in \mathbb{R}$, notée $\delta_a$, est définie comme distribution vérifiant pour $\phi \in \mathcal{D}$

$$< \delta_a, \phi > = \phi(a)$$

## 4.7 $\tau_a(T)$

Si $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}$ et $\phi \in \mathcal{D}$, on a

$$< \tau_a(f), \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(t-a)\phi(t)dt$$

$$< \tau_a(f), \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(u)\phi(u+a)du$$

i.e.

$$< \tau_a(f), \phi >=< f, \tau_{-a}(\phi) >$$

Plus généralement, pour $T \in \mathcal{D}'$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$< \tau_a(T), \phi >=< T, \tau_{-a}(\phi) >$$

On a donc en particulier

$$\delta_a = \tau_a(\delta)$$

# Chapter 5

# Extension de Fourier

## 5.1 Fourier et distribution

Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, C)$, et $\phi \in \mathcal{D}$ on a

$$< \mathcal{F}_\Omega(f)_\nu, \phi(\nu) >= \int_R (\int_R f(t).e^{-i\Omega\nu t} dt)\phi(\nu)d\nu$$

i.e.

$$< \mathcal{F}_\Omega(f)_\nu, \phi(\nu) >= \int_R (\int_R \phi(\nu).e^{-i\Omega\nu t} d\nu)f(t)dt$$

ou encore

$$< \mathcal{F}_\Omega(f)_\nu, \phi(\nu) >=< f(t), \mathcal{F}_\Omega(\phi)(t) >$$

Pour $T \in \mathcal{D}'$, on pose quand cela a du sens

$$< \mathcal{F}_\Omega(T), \phi >=< T, \mathcal{F}_\Omega(\phi) >$$

### 5.1.1 $\mathcal{F}_\Omega(\delta)$

$$< \mathcal{F}_\Omega(\delta), \phi >=< \delta, \mathcal{F}_\Omega(\phi) >= \mathcal{F}_\Omega(\phi)(0)$$

$$< \mathcal{F}_\Omega(\delta), \phi >= \int_R \phi =< 1, \phi >$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_\Omega(\delta) = 1$$

### 5.1.2 $\mathcal{F}_\Omega(\delta')$

On a aussi

$$\mathcal{F}_\Omega(\delta') = i\Omega\nu$$

puisque

$$< \mathcal{F}_\Omega(\delta')_\nu, \phi(\nu) >=< \delta', \mathcal{F}_\Omega(\phi)(t) >$$

$$= - < \delta, D_t(\mathcal{F}_\Omega(\phi)) >= - < \delta, D_t \int_R \phi(\nu).e^{-i\Omega\nu t} d\nu >$$

$$=< \delta, \int_R i\Omega\nu\phi(\nu)e^{-i\Omega\nu t} d\nu >= \int_R i\Omega\nu\phi(\nu) d\nu$$

$$=< i\Omega\nu, \phi(\nu) >$$

### 5.1.3 $\mathcal{F}_\Omega \circ D$

Avec l'égalité

$$DT = \delta' * T$$

On obtient la formule

$$\mathcal{F}_\Omega \circ D = [i\Omega\nu]$$

## 5.2 Application à RC

### 5.2.1 RC

On a vu que la solution $\mathbf{s}$ de l'équation différentielle

$$\mathbf{e} = \mathrm{RC}\mathbf{s}' + \mathbf{s}$$

peut se remplacer, dans $\mathcal{D}'$ , par l'équation

$$\mathbf{e} = A * \mathbf{s}$$

avec $A \in \mathcal{E}'$ définie par

$$A = \delta + \mathrm{RC}\delta'$$

En appliquant Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{e}) = (1 + \mathrm{RC}i\Omega\nu).\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{s})$$

On retrouve ainsi le transfert $\mathcal{F}_\Omega(h)$

$$\mathcal{F}_\Omega(\mathbf{s}) = \mathcal{F}_\Omega(\mathbf{e}).\mathcal{F}_\Omega(h)$$

avec

$$\mathcal{F}_\Omega(h) = \frac{1}{1 + \mathrm{RC}i\Omega\nu}$$

et $h$ par unicité dans $L^1$ où $\mathcal{F}_\Omega$ est injective.

### 5.2.2 RC et conditions initiales

Sans la condition $\mathbf{e}$ nulle pour $t < 0$, on a vu que la recherche d'une $\mathbf{s}$ solution de l'équation différentielle vérifiant seulement pour $t > 0$

$$\mathbf{e}(t) = \mathrm{RC}\mathbf{s}'(t) + \mathbf{s}(t)$$

peut se faire en définissant les distributions

$$T = \mathcal{H}.\mathbf{s}$$

et

$$U = \mathcal{H}.\mathbf{e}$$

qui vérifient

$$U = \mathrm{RC}(DT - \mathbf{s}(0+)\delta) + T$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}_\Omega(U) = \mathrm{RC}(i\Omega\nu.\mathcal{F}_\Omega(T) - \mathbf{s}(0+)) + \mathcal{F}_\Omega(T)$$

d'où

$$\mathcal{F}_\Omega(T) = \frac{\mathcal{F}_\Omega(U) + \mathrm{RC}\mathbf{s}(0+)}{1 + \mathrm{RC}i\Omega\nu}$$

## 5.3 Extension à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

### 5.3.1 Intérêt de $\mathcal{L}^2$

On a vu que la transmittance du filtre RC n'était dans pas dans $\mathcal{L}^1$ mais son carré est intégrable sur $\mathbb{R}$

Physiquement le calcul de puissance se fait par intégration d'un carré. On considère donc l'ensemble $\mathcal{L}^2$ formé des applications de carré intégrable.

### 5.3.2 Structure de $L^2$

La relation

$$f \equiv g \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mid f - g \mid^2 = 0$$

est une relation d'équivalence dans $\mathcal{L}^2$ et on note $L^2$ l'espace des classes d'équivalence.

$L^2$ est un espace normé avec la norme

$$\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{R}} \mid f \mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

### 5.3.3 Prolongement de $\mathcal{F}$

Si $f \in L^2$,

$$\int_{-n}^{n} f e^{-i\Omega\nu t} \in L^2$$

et on définit $\mathcal{F}_\Omega(f)$ comme la limite suivante dans $L^2$

$$\mathcal{F}_\Omega(f) = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f e^{-i\Omega\nu t}$$

$\mathcal{F}_\Omega$ devient une isométrie de $L^2$ qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1 \cap L^2$

Dans $L^2$ on peut donc écrire

$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{i\Omega t + a}) = \frac{2\pi}{|\Omega|} e^{a\nu} \sigma(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{F}_\Omega(\frac{1}{i\Omega t - a}) = -\frac{2\pi}{|\Omega|}e^{-a\nu}\mathcal{H}$$

On peut retrouver la réponse impulsionnelle

$$h = (\mathcal{F}_\Omega)^{-1}(\frac{1}{\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1})$$

$$= \left(\frac{|\Omega|}{2\pi}\right)\mathcal{F}_{-\Omega}(\frac{1}{\mathrm{RCi}\Omega\nu + 1})$$

## 5.4 Extension de Fourier à $\mathcal{S}'$

### 5.4.1 $\mathcal{F}_\Omega(\mathcal{H})$

$\mathcal{H} \notin L^1 \cup L^2$ mais en considérant $\mathcal{H} \in L^1_{loc}$ on peut écrire formellement pour $\phi \in \mathcal{D}$

$$< \mathcal{F}_\Omega(\mathcal{H})_\nu, \phi(\nu) >=< \mathcal{H}_t, \mathcal{F}_\Omega(\phi)_t >$$

i.e.

$$< \mathcal{F}_\Omega(\mathcal{H}), \phi >= \int_0^\infty dt(\int_{\mathbb{R}} \phi(\nu)e^{-i\Omega\nu t}d\nu) < \infty$$

et $\mathcal{F}_\Omega(\mathcal{H})$ est donc bien définie dans $\mathcal{D}'$

On remarquera que Fubini n'est pas applicable ici et donc l'écriture

$$\mathcal{F}_\Omega(\mathcal{H}) = \int_0^\infty e^{-i\Omega\nu t}dt$$

n'a de sens que dans $\mathcal{D}'$

### 5.4.2 $\mathcal{S}'$

On a déjà vu que la transformée de Fourier d'une application caractéristique d'un segment ne peut être nulle en dehors d'un segment.
Pour donner du sens à beaucoup d'autres transformées de Fourier de distributions, par exemple à la transformée de Fourier d'un polynôme $P$, on

augmente l'espace des applications tests à un espace $\mathcal{S}$ stable par $\mathcal{F}_\Omega$ de telle sorte que , pour $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}} P(\int_{\mathbb{R}} \psi(\nu)e^{-i\Omega\nu t}d\nu)dt$$

soit fini.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\subset L^1 \cap L^2$ qui contient les applications typiques

$$e^{-t^2}\ ,\ \frac{1}{\cosh}$$

et la transformée de Fourier est alors un automorphisme de $\mathcal{S}$.

(En fait, $\mathcal{S}$ est formé des applications $C^\infty(\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont négligeables à l'infini devant toute fraction rationnelle).

On obtient ainsi l'espace dual des distributions **tempérées**

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

pour lesquelles, pour $\psi \in \mathcal{S}$,

$$< T, \int_{\mathbb{R}} \psi e^{-i\Omega\nu t}d\nu) >$$

a du sens et la transformée de Fourier devient alors un automorphisme de $\mathcal{S}'$

# Chapter 6

# Extension de Laplace

## 6.1 Laplace et distribution

Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $z = \zeta + i\nu \in \mathbb{C}$, on définit formellement la transformation de Laplace comme dans le cas fonctionnel en posant

$$\mathcal{L}(T)(z) = \mathcal{F}_1(e^{-\zeta t}T)(\nu)$$

i.e.

$$< \mathcal{L}(T)(z), \psi(\nu) >=< T_t, \int_{\mathbb{R}} e^{-zt}\psi(\nu)d\nu >$$

et on définit l'intervalle $I_T$ de $\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}(T)$ soit définie dans l'intérieur de la bande $I_T \times \mathbb{R}$ pour tout un espace ad hoc d'applications test $\psi$ (i.e. pour $\psi \in \mathcal{S}$ et $e^{-\zeta t}T \in \mathcal{S}'$ tempérée).

$\mathcal{L}(T)$ est la transformée de Laplace de $T$ et c'est une fonction holomorphe dans l'intérieur de la bande $I_T \times \mathbb{R}$.

Si $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, et si $I_T \neq \emptyset$, on a

$$I_T = (\zeta_0, +\infty[$$

$\zeta_0 \in \mathbb{R}$ ou $\zeta_0 = -\infty$ est **l'abscisse de convergence (ou d'existence)** de $\mathcal{L}(T)$ et cas symétrique pour $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$.

Si $T \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{R})$, $I_T = \mathbb{R}$

Si $T \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$, $I_T$ contient $\mathbb{R}_+$.

## 6.2 Autre définition

Si $T = T_f$ avec $f \in \Lambda_0$ on obtient alors

$$< \mathcal{L}(T_f)(z), \psi(\nu) > = < \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} f(t)dt, \psi(\nu) >$$

On trouve ainsi évidemment la même formule pour $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(T_f)$

$$\mathcal{L}(T_f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} f(t)dt = < f(t), e^{-zt} >$$

Plus généralement, pour une distribution $T$ on posera plus simplement

$$\mathcal{L}(T)(z) = < T_t, e^{-zt} >$$

ce qui revient à identifier dans la première définition $e^{-zt}$ et sa distribution associée

$$T_{e^{-zt}} : \ \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} \psi(\nu) d\nu$$

## 6.3 $\mathcal{L}(\delta_a)$

Pour $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-za}$$

en particulier

$$\mathcal{L}(\delta) = 1$$

## 6.4 Laplace et dérivation

Pour $f \in \Lambda_0$, $C^1$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(0^+)$ existe on a déjà obtenu

$$\mathcal{L}(Df) = z\mathcal{L}(f) - f(0^+)$$

Avec la distribution associée $T_f$ la formule devient donc plus simple:

$$\mathcal{L}(DT_f) = z\mathcal{L}(f)$$

puisque

$$\mathcal{L}(DT_f) = \mathcal{L}(Df + f(0^+)\delta) = \mathcal{L}(Df) + f(0^+)$$

Plus généralement, avec des distributions non régulières, on a

### 6.4.1

Pour $n \in N$

$$\mathcal{L}(D^n\delta_a) = z^n e^{-za}$$

en particulier

$$\mathcal{L}(D^n\delta) = z^n$$

### 6.4.2

Pour $n \in$N, on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$D^n \circ \mathcal{L} = (-1)^n \mathcal{L} \circ [t^n]$$

$$\mathcal{L} \circ D^n = [z^n] \circ \mathcal{L}$$

## 6.5 Convolution

1. Si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{E}'$, on a

   $$I_S \subset I_{S*T}$$

   et, sur la bande $\mathcal{R}e(z) >$ abscisse$(T)$,

   $$\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}(S)\mathcal{L}(T)$$

2. Pour $S$ et $T$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , on a

   $$I_S \cap I_T \subset I_{S*T}$$

   et, sur la bande

   $$\mathcal{R}e(z) > \max(\text{abscisse}(S), \text{abscisse}(T))$$

   $$\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}(S)\mathcal{L}(T)$$