Université Claude Bernard Lyon 1
Math4 SPIEEA
MT2214L2

Partiel

2 avril 2007- Durée : 1H30

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de sa clarté quant à la citation des résultats du cours utilisés, ainsi que des résultats calculatoires obtenus.
Texte: 2 pages, contenu: 3 exercices

Dans les exercices qui suivent, on note $\mathcal{H}$ la fonction d'Heaviside

<u>Exercice I</u>

1. Montrer que, s'il est défini, le produit de convolution de deux fonctions causales f et g est une fonction causale. Donner son expression $f * g$
2. Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}(t\mathcal{H})$ de la fonction $t \mapsto t\mathcal{H}(t)$
3. Résoudre l'équation
$$f(t) = t + \int_0^t (u - t) f(u) du$$
où f est une fonction nulle sur les réels négatifs .

Exercice II

1. Sachant que
$$\frac{1}{(z+1)^2(z-1)} = \frac{a}{(z+1)^2} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{z-1}$$
où a , b , c sont des nombres réels, déterminer a , b et c .

2. Donner l'expression de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f')$ de la dérivée d'une application f en fonction de $\mathcal{L}(f)$

3. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(t)e^{-t}$

4. Soit l'équation différentielle du second ordre (E) :
$$y"(t) - y(t) = \mathcal{H}(t)e^{-t}$$
En utilisant la transformée de Laplace déterminer la solution causale de (E) satisfaisant les deux conditions $y(0^+) = 0$ et $y'(0^+) = 0$

Exercice III

Dans cet exercice, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ d'une application f est définie par la formule
$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

1. Enoncer une condition suffisante pour que f admette une transformée de Fourier.

2. Soit f est une fonction réelle et paire admettant une transformée de Fourier.
   (a) Donner une autre expression de $\mathcal{F}(f)$ sous forme d'intégrale calculée sur $\mathbb{R}_+$
   (b) En déduire un résultat sur la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}(f)$ d'une application f réelle et paire

3. On considère la fonction g définie par
$$g(t) = \mathcal{H}(t)e^{-t} + \mathcal{H}(-t)e^{t}$$
Dessiner rapidement le graphe de g

4. Montrer que g admet une transformée de Fourier et la calculer en justifiant vos calculs.

5. On considère l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$$
   (a) Montrer que cette intégrale est convergente .
   (b) En utilisant ce qui précède et la transformée de Fourier inverse, calculer I