Université Claude Bernard LYON I **PROBABILITES**
Année universitaire 2007-2008

FEUILLE DE TD 1

Dénombrement

Exercice 1
Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants :
(i) Trois piques (ii) Aucun pique (iii) Un pique et deux "non-piques"
(iv) Au moins un pique (v) Trois cartes de la même famille (vi) Trois cartes de familles différentes
(vii) Trois as (viii) Aucun as (ix) Trois cartes rouges
lorsque :
1. On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu.
2. On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard.

Exercice 2 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?
2. En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \ldots + x_n = p\}$.
3. Supposons $p \geq n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?
4. De quel ensemble E_2 (construit de façon similaire à E_1) peut-on en déduire le cardinal ?
5. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

Exercice 3 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens strict) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

Caractérisation d'une loi de probabilité

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. Démontrer que sa fonction de répartition, notée F_X, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

vérifie les propriétés suivantes :
1. F_X est croissante avec $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 1$.
2. F_X est continue à droite en tout point et admet des limites à gauche en tout point. De plus $\lim_{y\to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)$.
3. F_X caractérise la loi de X.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit sa fonction génératrice par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{x\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x)s^x.$$

1. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.
3. Supposons que X et X^2 sont intégrables. Notons G'_X et G''_X les dérivées première et seconde de G_X. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$. En déduire l'expression de $\mathrm{Var}(X)$.

Lois discrètes usuelles

Exercice 6 Donner l'expression et tracer les fonctions de répartitions de loi de Bernoulli de paramètre $2/3$ puis de loi géométrique de paramètre $3/4$.

Exercice 7
1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. En déduire que la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.
3. Rappeler le comportement des séries $\sum_{n\geq 0} a^n$, $\sum_{n\geq 1} na^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a^{n-2}$ lorsque $|a| < 1$.
4. En déduire que la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.

Exercice 8 Au cours d'une expérience un certain événement E se réalise avec une probabilité $p \in]0,1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de E^c. Déterminer la loi de X.

Exercice 9 Calculer la fonction génératrice de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$;
2. de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$;
3. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
En déduire l'espérance et la variance de X dans chacun des cas.

Inégalités

Exercice 10
1. Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{(Markov)} \qquad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

2. En déduire que si X est de carré intégrable alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{(Tchebycheff)} \qquad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On extrait n fois avec remise une boule dans une urne composée de 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des n tirages. On pose $F_n = X_n/n$.
1. Donner la loi de X_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n puis de F_n.
2. On suppose dans cette question que $n = 10\,000$. A l'aide de l'exercice précédent, donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$.
3. Donner une estimation du nombre minimal n de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 0.99.