---

FEUILLE DE TD 2

---

# Probabilité conditionnelle, indépendance d'événements

**Exercice 1** *Formule de Bayes.*
**1.** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $(H_1, \ldots, H_n)$ une partition de $\Omega$ en $n$ événements de probabilité non nulle. Montrer que, pour $i = 1, \ldots, n$, si $A$ est un événement de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

**2.** Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

**Exercice 2** *Indépendance entre 3 événements*
On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement $A$, $B$ et $C$ les événements «Le chiffre du premier dé est pair», «Le chiffre du deuxième dé est pair» et «Les deux chiffres ont même parité».
**1.** Montrer que les événements $A$, $B$ et $C$ sont deux à deux indépendants.
**2.** Montrer que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

**Exercice 3** *Indépendance et passage au complémentaire*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants.
**1.** Montrer que $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants aussi.
**2.** En déduire la propriété plus générale : pour tous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.

# Variables aléatoires indépendantes

**Exercice 4** *Loi uniforme sur un ensemble produit, et indépendance*
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble fini (que l'on peut considérer inclus dans $\mathbb{N}$), et $n$ un entier naturel $\geq 2$. On note $\Omega = \mathcal{C}^n = \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}$, et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur $\Omega$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on définit la variable aléatoire :

$$\left| \begin{array}{llll} X_i : & \Omega & \to & \mathcal{C} \\ & \omega = (c_1, \ldots, c_n) & \mapsto & X_i(\omega) = c_i. \end{array} \right.$$

Montrer que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, et que chacune suit la loi uniforme sur $\mathcal{C}$.

**Exercice 5** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires sur $\Omega$ indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
**1.** Montrer que, pour toutes fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
**2.** On suppose $X$ et $Y$ intégrables. Montrer que $XY$ est intégrable et $E[XY] = E[X]E[Y]$.
**3.** On suppose $X^2$ et $Y^2$ intégrables. Montrer que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
**4.** Généraliser ces résultats à $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes.

**Exercice 6** *Fonctions indicatrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de $A$ :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

**1.** Pour des événements $A$ et $B$, exprimer $\mathbf{1}_{A^c}$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
**2.** Vérifier que, pour tout événement $A$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$.
**3.** Démontrer que des événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1} \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

**Exercice 7** *Deux utilisations des fonctions indicatrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret.
**1.** Montrer que, si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, on a la *formule du crible* :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{S \subset \{1,\dots,n\},\, S \neq \emptyset} (-1)^{1+\mathrm{Card}(S)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

**2.** Montrer que, si $X$ est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \ge n).$$

# Lois discrètes usuelles, somme de v.a. indépendantes

**Exercice 8** *Interprétation des lois usuelles*
On considère une suite d'expériences indépendantes dont l'issue est un succès avec probabilité $p$ et un échec avec probabilité $1-p$.
**1.** Montrer que l'instant où a lieu le premier succès suit une loi géométrique de paramètre $p$.
**2.** Montrer que le nombre de succès parmi les $n$ premières expériences suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

**Exercice 9** *Somme de v.a. indépendantes et fonctions génératrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\Omega$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
**1.** Exprimer la loi de $X+Y$ en fonction de celles de $X$ et $Y$.
**2.** Montrer que, pour tout $s \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. (on pourra donner deux preuves)
**3.** Généraliser ce qui précède au cas de $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$.
**4.** Quelle est la loi de la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p$ ? Retrouver alors l'espérance et la variance de cette loi.
**5.** Quelle est la loi de la somme de :
- deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres $(n,p)$ et $(m,p)$ ?
- deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $\mu$ ?

**Exercice 10** *Dés truqués*
**1.** Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$ ?
**2.** Soit $X_1$ et $X_2$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
*Indication : on remarquera que $G_{X_i}(s) = s\varphi_i(s)$ où $\varphi_i$ est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle (pourquoi ?).*
**3.** Peut-on piper deux dés indépendants de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables ?