FEUILLE DE TD 4

Exercice 1 Quelques inégalités

Soit X et Y des variables aléatoires positives de carré intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. À quelle condition a-t-on $\mathbb{E}[X^2] = 0$? On exclut cette possibilité dans la suite.

2. En considérant la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}\left[(X + \lambda Y)^2\right]$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

3. Montrer que pour tout $a \in [0, 1]$:

$$(1 - a)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}[X], +\infty[}(X)\right].$$

4. En déduire que pour tout $a \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}[X]) \geq (1 - a)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Exercice 2 Généralisation d'inégalités du cours

Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $I \subset \mathbb{R}$, et $b > 0$ tels que $g(x) \geq b > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{b}.$$

2. Retrouver à l'aide du résultat précédent les inégalités de Markov et Tchebycheff.

3. En utilisant la fonction $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$ montrer que si $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

Exercice 3 Loi Uniforme

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Donner la loi de $\sin(U)$.

2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Donner la loi de $|U|$, U^2 et $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + U}{1 - U}$.

Exercice 4 Loi Gamma

Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.

2. Déterminer l'espérance de cette loi.

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

3. Montrer par récurrence que la loi de la somme $V_1 + \cdots + V_n$ est la loi $\gamma_{n,\lambda}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.

4. Déterminer la loi de λX.

5. Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{Y}$ sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.

6. Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement.

7. Déterminer la loi de $X + Y$.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

8. Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$.

9. Montrer que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2,1/2}$. *(La loi $\gamma_{n/2,1/2}$ est également appelée loi $\chi^2(n)$).*

Exercice 5 Loi Normale

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Notons $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ la fonction caractéristique de X. Donner $Re\,(\Phi_X(t))$ et $Im\,(\Phi_X(t))$ puis montrer à l'aide d'intégrations par parties que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En déduire l'expression de Φ_X.

2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer la loi de $X_\theta = X\cos(\theta) + Y\sin(\theta)$ et $Y_\theta = -X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$.

3. Les variables X_θ et Y_θ sont-elles indépendantes ?