FEUILLE DE TD 7

Exercice 1
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
1. Calculer la fonction de répartition de Z.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
4. Calculer les fonctions de répartition de X et Y.
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer $\mathbb{P}(a < Z < b)$.

Exercice 2
1. Soit $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de $X_0, X_1, \ldots, X_n$. On pose

$$U = \sum_{i=0}^{N} X_i.$$

Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$V = \begin{cases} 0 & si \quad N = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & si \quad N \geq 1. \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V. Quelle loi reconnaissez-vous ?

Exercice 3 Soit X, Y, Z trois variables aléatoires réelles telles que :
(i) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$,
(ii) La loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $(y - x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(y)$.
(iii) La loi conditionnelle de Z sachant $(X, Y) = (x, y)$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $(y - x)e^{-z(y-x)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(y)$.
1. Quelle est la loi du vecteur (X, Y, Z) ?
2. Quelle est la loi de Z ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de (X, Y) sachant Z ?
4. Calculer $\mathbb{E}(\sqrt{Y - X}|Z = z)$ puis $\mathbb{E}(\sqrt{Y - X})$.
5. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Quelle est la loi du vecteur (X, U, V) ?
6. Les variables aléatoires X, U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4
1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq 1\}}$.
3. Notons $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.