FEUILLE DE TD 1

Dénombrement

Exercice 1
Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants :
(i) Trois piques (ii) Aucun pique (iii) Un pique et deux "non-piques"
(iv) Au moins un pique (v) Trois cartes de la même famille (vi) Trois cartes de familles différentes
(vii) Trois as (viii) Aucun as (ix) Trois cartes rouges
lorsque :
1. On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu.
2. On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard.

Exercice 2 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?
2. En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \ldots + x_n = p\}$.
3. Supposons $p \geq n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?
4. De quel ensemble E_2 (construit de façon similaire à E_1) peut-on en déduire le cardinal ?
5. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

Exercice 3 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens strict) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

Caractérisation d'une loi de probabilité

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. Démontrer que sa fonction de répartition, notée F_X, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

vérifie les propriétés suivantes :
1. F_X est croissante avec $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 1$.
2. F_X est continue à droite en tout point et admet des limites à gauche en tout point. De plus $\lim_{y \to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)$.
3. F_X caractérise la loi de X.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit sa fonction génératrice par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

1. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.
3. Supposons que X et X^2 sont intégrables. Notons G'_X et G''_X les dérivées première et seconde de G_X. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$. En déduire l'expression de $\mathrm{Var}(X)$.

FEUILLE DE TD 2

Rappels : Lois usuelles discrètes

Bernoulli(p) avec $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.
Binomiale(n,p) avec $n > 0$ et $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, n$.
Géométrique(p) avec $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
Poisson(λ) avec $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Lois discrètes usuelles

Exercice 1 Donner l'expression et "tracer" les fonctions de répartitions de loi de Bernoulli de paramètre 2/3 puis de loi géométrique de paramètre 3/4.

Exercice 2
1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. En déduire que la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.
3. Rappeler le comportement des séries $\sum_{n\geq 0} a^n$, $\sum_{n\geq 1} na^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a^{n-2}$ lorsque $|a| < 1$.
4. En déduire que la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.

Exercice 3 Au cours d'une expérience un certain événement E se réalise avec une probabilité $p \in]0,1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de E^c. Déterminer la loi de X.

Exercice 4 Calculer la fonction génératrice de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$;
2. de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$;
3. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
5. En déduire l'espérance et la variance de X dans chacun des cas.

Inégalités

Exercice 5
1. Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_\star^+$

$$\text{(Markov)} \qquad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

2. En déduire que si X est de carré intégrable alors pour tout $a \in \mathbb{R}_\star^+$

$$\text{(Tchebycheff)} \qquad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On extrait n fois avec remise une boule dans une urne composée de 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des n tirages. On pose $F_n = X_n/n$.
1. Donner la loi de X_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n puis de F_n.
2. On suppose dans cette question que $n = 10\,000$. A l'aide de l'exercice précédent, donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$.
3. Donner une estimation du nombre minimal n de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 0.99.

FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 *Fonctions indicatrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Pour des événements A et B, exprimer $\mathbf{1}_{A^c}$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Vérifier que, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$.
3. Montrer que si X est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Indépendance

Exercice 2 *Indépendance entre 3 événements*
On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les événements «Le chiffre du premier dé est pair», «Le chiffre du deuxième dé est pair» et «Les deux chiffres ont même parité».
1. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 3 *Indépendance et passage au complémentaire*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants.
1. Montrer que $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants aussi.
2. En déduire par récurrence la propriété plus générale : pour tous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.
3. Démontrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si, et seulement si les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$.
1. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
2. On suppose X et Y intégrables. Montrer que XY est intégrable et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
3. On suppose X^2 et Y^2 intégrables. Montrer que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
4. Généraliser ces résultats à n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes.

Exercice 5 Si X est une variable aléatoire indépendante de Y et si Y est indépendante de Z, est-ce que X est indépendante de Z ?

Lois usuelles et indépendance

Exercice 6 *Interprétation des lois usuelles*
On considère une suite d'expériences indépendantes dont l'issue est un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1-p$.
1. Montrer que le nombre de succès parmi les n premières expériences suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Montrer que l'instant où a lieu le premier succès suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 7 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_X et p_Y. On définit $Z = \min(X, Y)$.
1. Calculer les fonctions de répartition de X, Y, Z.
2. En déduire la loi de Z.

Conditionnement

Exercice 8 *Formule de Bayes*
1. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $(H_1, \ldots, H_n)$ une partition de Ω en n événements de probabilité non nulle. Montrer que, pour $i = 1, \ldots, n$, si A est un événement de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

2. Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 9
Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.
1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue.

Feuille de TD 4

Somme de v.a. indépendantes et fonction génératrice

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
1. Exprimer la loi de $X+Y$ en fonction de celles de X et Y.
2. Montrer que, pour tout $s \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. (on pourra donner deux preuves)
3. Généraliser ce qui précède au cas de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$.
4. Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ? Retrouver alors l'espérance et la variance de cette loi.
5. Quelle est la loi de la somme de :
- deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres (n,p) et (m,p) ?
- deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ et μ ?

Exercice 2 *Dés truqués*
1. Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?
2. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.
Indication : on remarquera que $G_{X_i}(s) = s\varphi_i(s)$ où φ_i est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle (pourquoi ?).
3. Peut-on piper deux dés indépendants de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables ?

Lois continues usuelles

Exercice 3 Calculer l'espérance et la variance de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
2. de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ de paramètre $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;
3. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ avec $a > 0$. La loi de X est appelée loi de Cauchy de paramètre a.
Vérifier que f est bien une densité. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 5 Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Montrer qu'une variable aléatoire positive dont la loi admet une densité est sans mémoire si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle.
1. Supposons que X a pour densité f. Quel lien y a-t-il entre f et la fonction de répartition F_X ?
2. Réciproquement, donner une condition sur F_X pour que la loi de X admette une densité.
3. Soit r un réel > 0. On suppose X à valeurs positives. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx,$$

où les deux membres sont finis ou infinis. On pourra donner une preuve dans le cas à densité (à l'aide de ce qui précède), et une preuve dans le cas général (dans l'esprit de la question 1.3 de la feuille 3).

Exercice 7 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
1. Calculer la loi de $\max_{i=1,\ldots,n} X_i$. *(Indication : calculer la fonction de répartition.)*
2. Calculer la loi de $\min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

FEUILLE DE TD 5

Obtenir une loi à partir d'une autre

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = f(X)$.
1. On suppose que X admet une densité et que f est injective et C^1 par morceau. Déterminer la densité de Y à l'aide d'un changement de variable.
2. On suppose que la loi de X est uniforme sur $[0, 1]$ et $f(x) = -\ln x$. Quelle est la loi de Y ?
3. Si X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, trouver une fonction f telle que Y est de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Donner la loi de $\sin(U)$.
5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Donner la loi de
(a) $|U|$ (b) U^2 (c) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+U}{1-U}$.

Exercice 2 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de Z^{-1} si Z est une variable aléatoire de loi de Cauchy.

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Calculer, en fonction de m et σ, l'espérance $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

Quelques inégalités

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires positives de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. A quelle condition a-t-on $\mathbb{E}(X^2) = 0$? On exclut cette possibilité dans la suite.
2. En considérant la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}\left[(X + \lambda Y)^2\right]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

3. Montrer que pour tout $a \in [0, 1]$:

$$(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X),\infty[}(X)\right).$$

4. En déduire que pour tout $a \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 5 *L'inégalité de Jensen*
Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle E qui contient les valeurs d'une variable aléatoire X. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Montrer que si f est strictement convexe, alors l'égalité $f(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(f(X))$ implique que X est constante sur un événement presque sûr (c'est-à-dire de mesure 1 pour $\mathbb{P}$).

Exercice 6 Soit Ω un ensemble fini.
L'*entropie* d'une probabilité P sur Ω est $H(P) = -\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})\log_2 P(\{\omega\})$, où $\log_2$ est le logarithme en base 2 et on adopte la convention $0\log_2 0 = 0$. Pour P, Q probabilités sur Ω avec $Q(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, leur *entropie relative* est $D(P\|Q) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})\log_2\left(\dfrac{P(\{\omega\})}{Q(\{\omega\})}\right)$.
1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positive et que $D(P\|Q) = 0$ implique $P = Q$.
2. En déduire que, parmi les probabilités sur Ω, l'entropie est maximale pour la loi uniforme sur Ω et uniquement pour celle-ci.

FEUILLE DE TD 6

Exercice 1 *Généralisation d'inégalités du cours*
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $g(x) \geq b > 0$ pour tout $x \in I \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq b^{-1}\mathbb{E}(g(X)).$$

2. Retrouver à l'aide du résultat précédent les inégalités de Markov et Tchebycheff.
3. En utilisant la fonction $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$ montrer que si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$ alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

Exercice 2 *Loi Gamma*
Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.
2. Déterminer l'espérance de cette loi.

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Montrer par récurrence que la loi de la somme $V_1 + \cdots + V_n$ est la loi $\gamma_{n,\lambda}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.
4. Déterminer la loi de λX.
5. Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.
6. Montrer que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X/(X + Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement.
7. Déterminer la loi de $X + Y$.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
8. Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$.
9. Montrer que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2,1/2}$. *(La loi $\gamma_{n/2,1/2}$ est également appelée loi $\chi^2(n)$).*

Exercice 3 *Loi Normale*
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
1. Notons $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X. Donner $Re\,(\Phi_X(t))$ et $Im\,(\Phi_X(t))$ puis montrer à l'aide d'intégrations par parties que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En déduire l'expression de Φ_X.
2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer la loi de $X_\theta = X\cos(\theta) + Y\sin(\theta)$ et $Y_\theta = -X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$.
3. Les variables X_θ et Y_θ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *Extrait du partiel d'avril 2008*
1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(m, \sigma^2)$ et $N(m', \sigma'^2)$. Quelle est la loi de $X + Y$?
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi $N(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$?
3. Montrer que $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - m)$ suit une loi $N(0, 1)$.
4. Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer qu'il existe (sans l'expliciter) un unique nombre réel positif ϕ_α tel que

$$\int_{-\phi_\alpha}^{\phi_\alpha} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \alpha.$$

5. En déduire qu'il existe un intervalle $I_\alpha = [m - t, m + t]$, avec t à préciser en fonction des constantes de l'exercice, tel que $P(\overline{X}_n \in I_\alpha) = 1 - \alpha$.
6. En déduire que pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| > t) = 0$.
7. On applique 5) au cas où $m = 1/2, \sigma = 1/2$, $n = 1000$ et $\alpha = 0,05$. On a $\phi_\alpha = 1,96$ dans ce cas. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(\overline{X}_n \leq 0,45)$?

FEUILLE DE TD 7

Fonction caractéristique

Exercice 1 *Lois symétriques, fonction caractéristique*
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.
1. À quelle condition une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est-elle symétrique ?
2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi. Exprimer en fonction de la fonction caractéristique Φ_X de X les fonctions caractéristiques suivantes : Φ_{-X}, Φ_{X+Y}, Φ_{X-Y}.
3. Montrer que la loi d'une variable aléatoire réelle X est symétrique si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$.
4. Soit Y une v.a. réelle, et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1).$$

Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique (en fonction de Φ_Y). Si Y admet une densité f, quelle est la loi de X ?

Exercice 2 *Calculs de fonctions caractéristiques*
1. Calculer Φ_X où X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. En déduire Φ_Z où Z suit la loi $\gamma_{n,\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace, c'est-à-dire que la loi de X a pour densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$. (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent)
3. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Quelle est la loi de la moyenne de deux variables aléatoires de loi de Cauchy de paramètre 1 indépendantes ?
4. Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Rappeler la valeur de $\Phi_{X_i}(t)$. Calculer $\Phi_{X_1X_2}$ (en utilisant le théorème de Fubini), puis $\Phi_{X_1X_2+X_3X_4}$, et en déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Loi conditionnelle (cas général, cas à densité)

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant Y ? Plus généralement, pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable, quelle est la loi conditionnelle de $\varphi(X, Y)$ sachant Y ?

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X, X + Y)$, et en déduire la loi conditionnelle de X sachant $X + Y$.

Exercice 5 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Déterminer la loi du couple $(X, Z) = (X, X^2 + Y^2)$.
2. En déduire la loi de $X^2 + Y^2$ puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\,|X|\,|X^2 + Y^2]$.
4. On note $R = \sqrt{Z}$ et on définit $\Theta \in [0, 2\pi[$ par les équations $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Déterminer la loi du couple (R, Θ). Ces variables sont-elles indépendantes ? Retrouver alors rapidement le résultat de la question précédente.

FEUILLE DE TD 8

Modes de convergence et lemme de Borel-Cantelli

QUELQUES RAPPELS

Par définition
$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k,$$
donc $\omega \in \liminf_n A_n \Leftrightarrow$ il existe n tel que $\omega \in A_k$ pour tout $k \geq n$. $\liminf_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. D'autre part
$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$$
donc $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow$ pour tout n, il existe $k(n) \geq n$ tel que $\omega \in A_{k(n)}$ donc $\limsup_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.
On savait déjà que pour une suite d'événements $(A_n)_n$:
* $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ avec une égalité dans le cas où les A_n sont deux à deux disjoints.
* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est croissante.
* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est décroissante.

Posons $I_n = \cap_{k\geq n} A_k$ et $J_n = \cup_{k\geq n} A_k$. On a donc $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(J_n)$ et $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cap_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n)$.
De plus pour tout n
$$I_n \subset A_n \subset J_n$$
et par conséquent
$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Borel-Cantelli :
* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.
* (A_n) mutuellement indépendants et $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose
$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}.$$
Le but est de montrer que $Y = \frac{1}{\lambda}$ presque surement.
1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$
2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.
3. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right).$$
4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$.
5. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = 1$.
6. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge vers 0 en probabilité. Cette suite converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 2 Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0,1]$ qui tend vers 0. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p_n : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.
1. Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.
2. Sous quelle condition sur la somme $\sum_n p_n$ la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle aussi presque sûrement vers 0 ?

Exercice 3 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (i.e. qui valent 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $q = 1 - p$). Pour tout n, on note $Y_n = U_n U_{n+1}$, puis $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.
1. Pour tout n, quelle est la loi de Y_n ?
2. A quelle condition sur n et m tels que $1 \leq n < m$ les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[Y_n Y_m]$ puis calculer $\mathbb{E}[S_n/n]$.
4. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout n, $\mathrm{Var}[S_n] \leq Cn$.
5. Démontrer que la suite S_n/n converge en probabilité vers une constante à préciser.

FEUILLE DE TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
1. Calculer la fonction de répartition de Z.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
4. Calculer les fonctions de répartition de X et Y.
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer $\mathbb{P}(a < Z < b)$.

Exercice 2
1. Soit $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de $X_0, X_1, \ldots, X_n$. On pose

$$U = \sum_{i=0}^{N} X_i.$$

Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$V = \begin{cases} 0 & si \quad N = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & si \quad N \geq 1. \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V. Quelle loi reconnaissez-vous ?

Exercice 3
1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq 1\}}$.
3. Notons $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que M_n converge en probabilité vers 1.

FEUILLE DE TD 10

Exercice 1
Montrer que, dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence PFPFF (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi forte des grands nombres.

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général $\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4
1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c, alors la convergence a lieu en probabilité.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement). *Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $-X$, qui a même loi.*

Exercice 5 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $Z_n = 1/\overline{X}_n$.
1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers λ quand n tend vers ∞.
2. En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de $\overline{X}_n$?
3. Soit N une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0,95$.
4. En déduire un intervalle de la forme $I = [1/\lambda - \beta, 1/\lambda + \beta]$, avec β à déterminer, tel que $\mathbb{P}(\overline{X}_n \in I) = 0,95$.
5. En déduire ensuite un intervalle de la forme $J = [\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda]$, avec α_1, α_2 à déterminer, tel que $\mathbb{P}(Z_n \in J) = 0,95$.
6. Application numérique : calculer J, en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1,96$.