Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2014-2015

MACS 1 – Intégration et probabilités

Examen final du 6 mai 2015

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1 – ***Calculs sur les lois à densité.*** Soit X une variable aléatoire de densité

$$f : x \mapsto f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour certains calculs d'intégrales dans la suite, on pourra penser à intégrer par parties avec $v' = xe^{-x^2/2}$ *ou se rappeler que* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Vérifier que f est effectivement une fonction de densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.
3. Calculer $E[X]$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.
5. Déterminer la loi de X^2.
6. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. On pose $M = \max(X, Y)$.
6.a) Calculer la fonction de répartition de M.
6.b) La loi de M a-t-elle une densité ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. Si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$,
1.a) calculer, en fonction de λ, $P(X \neq 0)$, $E[X]$ et $E[X!]$;
1.b) justifier que $\ln(1 + X)$ est intégrable.
2. On définit $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \prod_{m=1}^{n} X_m = X_1 \cdots X_n.$$

2.a) Pour $n \geq 1$, calculer $P(Z_n \neq 0)$. En déduire que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2.b) Montrer que, presque sûrement, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n = 0$. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2.c) Pour $n \geq 1$, que vaut $E\big[|Z_n|\big]$? Est-ce que $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans L^1 ?
2.d) On définit la variable aléatoire

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Justifier que $W < \infty$ p.s., et calculer $E[W]$.
3. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$Y_n = \prod_{m=1}^{n} \big(1 + X_m\big).$$

À l'aide d'un théorème du cours, montrer que $(\frac{1}{n} \ln Y_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers une constante réelle (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice 3 – ***Inégalité exponentielle.*** Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Montrer que, pour tout $\lambda < 1$,

$$E[e^{\lambda X_1}] = \frac{1}{1-\lambda}.$$

2. En déduire, pour $\lambda < 1$ et $n \geq 1$, la valeur de $E[e^{\lambda T_n}]$.
3. Montrer que, pour toute variable aléatoire réelle Z, pour tout $\lambda > 0$, et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(Z > a) \leq e^{-\lambda a} E[e^{\lambda Z}].$$

Indication : On pourra remarquer que $Z > a$ si, et seulement si $e^{\lambda Z} > e^{\lambda a}$.
4. Soit $\varepsilon > 0$, et $n \geq 1$.
4.a) Utiliser l'inégalité précédente pour obtenir une majoration de la forme : pour tout $0 < \lambda < 1$,

$$P(T_n > (1+\varepsilon)n) \leq e^{-n\psi_\varepsilon(\lambda)}$$

où ψ_ε est une fonction qui ne dépend pas de n.
4.b) Déterminer la valeur de λ qui maximise $\psi_\varepsilon(\lambda)$. Montrer que l'inégalité précédente s'écrit, pour cette valeur de λ,

$$P(T_n > (1+\varepsilon)n) \leq e^{-n(\varepsilon - \ln(1+\varepsilon))}.$$

4.c) Montrer que, pour toute variable aléatoire Z, pour tout $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$P(Z < a) \leq e^{\lambda a} E[e^{-\lambda Z}].$$

On **admet** que l'on peut alors adapter le calcul de 4.a) et 4.b) pour obtenir

$$P(T_n < (1-\varepsilon)n) \leq e^{-n(-\varepsilon - \ln(1-\varepsilon))}.$$

5. Justifier qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$,

$$x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{3}.$$

En déduire que, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/3}.$$

6. En utilisant le résultat précédent pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{6\ln n}{n}}$ et un « lemme » du cours (et sans utiliser la loi forte des grands nombres), conclure que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{T_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 1 presque sûrement.
On a donc redémontré la loi forte des grands nombres dans ce cas particulier, à l'aide d'estimées quantitatives.