Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2015-2016

MACS 1 – Intégration et probabilités

Examen final du 5 janvier 2016

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

NB. Quand on demande de calculer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition, densité,...), veiller à donner ses valeurs sur tout l'intervalle $\mathbb{R}$. Il sera souvent utile de distinguer des cas pour faciliter les calculs.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X : x \mapsto 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Vérifier que f_X définit bien une densité.
2. Calculer la fonction de répartition F_X de X, et la représenter graphiquement.
3. Calculer les quantités suivantes : $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.
4. Déterminer la médiane de la loi de X, c'est-à-dire une valeur x telle que $\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \ge x)$.
5. On définit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.
6. Soit U une variable aléatoire indépendante de X, et de loi donnée par $\mathbb{P}(U = +1) = \mathbb{P}(U = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Z = UX$.
6.a) Que vaut $\mathbb{P}(Z > 0)$?
6.b) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(Z \le t \,|\, U = +1)$.
6.c) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(Z \le t \,|\, U = -1)$.
6.d) En déduire la fonction de répartition de Z.
6.e) La variable Z admet-elle une densité ? Si oui, laquelle ?

Exercice 2. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On définit les variables aléatoires U et V par

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X}{X+Y}.$$

1. On s'intéresse à la loi de U.
1.a) Calculer la fonction caractéristique $\Phi_X : t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$ de X.
1.b) Calculer la fonction caractéristique de U.
1.c) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Z de densité $f_Z : z \mapsto ze^{-z}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$.
1.d) Conclure : quelle est la loi de U ?
2. On s'intéresse à la loi de V.
2.a) Préciser les valeurs possibles de V : donner un intervalle, aussi petit que possible, auquel appartient V presque sûrement.
2.b) Pour $t \in \mathbb{R}$, écrire $\mathbb{P}(V \le t)$ sous forme d'une intégrale double et la calculer.
2.c) Quelle est la loi de V ?
3. On s'intéresse à la loi de (U, V).
3.a) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Écrire $\mathbb{E}[g(U, V)]$ sous forme d'une intégrale double.
3.b) Calculer la densité du couple (U, V).
3.c) U et V sont-elles indépendantes ? Retrouver leurs lois.

Exercice 3. Un vaisseau spatial traverse un champ d'astéroïdes, et passe à proximité d'un nombre aléatoire N d'entre eux. Il heurte chacun de ces astéroïdes avec une probabilité $p \in [0,1]$, indépendamment les uns des autres. On cherche la loi du nombre d'astéroïdes heurtés. On supposera que le nombre N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et est indépendant du fait que chaque astéroïde heurte le vaisseau ou non.
Autrement dit, soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, et soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère les variables aléatoires

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \qquad Z = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1. Calculer la fonction génératrice $G_{X_1}(s) = \mathbb{E}[s^{X_1}]$ de X_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la fonction génératrice de S_n. En développant, en déduire la loi de S_n.
3. On considère la fonction génératrice $G_Z(s) = \mathbb{E}[s^Z]$ de Z.
3.a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [-1,1]$,

$$\mathbb{E}[s^Z \mid N = n] = G_{S_n}(s).$$

3.b) En déduire $G_Z(s)$ pour $s \in [-1,1]$.
3.c) En déduire la loi de Z.
3.d) Quelle est la probabilité que le vaisseau sorte indemne du champ d'astéroïdes ?

Exercice 4. On considère les lancers successifs de deux pièces équilibrées : soit deux suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $1/2$. On considère le premier instant où l'un des deux tirages est « pile »(c'est-à-dire 1) :

$$N = \min\{n \geq 1 \mid X_n = 1 \text{ ou } Y_n = 1\}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(N = n)$. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $n \geq 1$. Ré-exprimer l'événement

$$\{N = n,\ X_N = 1,\ Y_N = 0\}$$

(on rappelle que les virgules se lisent « et ») en fonction de $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ et en déduire un calcul de sa probabilité.
3. En déduire la valeur de $P(X_N = 1, Y_N = 0)$.
4. Que vaut $P(X_N = 0, Y_N = 0)$? Et $P(X_N = 0, Y_N = 1)$? Et $P(X_N = 1, Y_N = 1)$?
5. En déduire une méthode, à l'aide de pièces de monnaie équilibrées, pour tirer un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3\}$ de façon équiprobable.

Rappels (lois de probabilité)

- X suit la loi exponentielle de paramètre λ si X a pour densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$
- X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$
- X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.