Compléments sur les applications mesurables

Proposition 1. Si $f : (F, \mathcal{B}) \to (G, \mathcal{C})$ et $g : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ sont mesurables, alors leur composée $f \circ g : (E, \mathcal{A}) \to (G, \mathcal{C})$ est mesurable.

Démonstration. En effet, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $(f \circ g)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$ car $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. □

Lemme 1. Pour vérifier que $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ est mesurable, il suffit de vérifier que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{C}$ dès lors que $\mathcal{C}$ est un ensemble de parties de F qui engendre $\mathcal{B}$: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.

Démonstration. Définissons
$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$
Alors par hypothèse $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, et on souhaite montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{G}$ est une tribu :
- $\emptyset \in \mathcal{G}$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est une tribu) ;
- si $B \in \mathcal{G}$, cela signifie que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, d'où $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est une tribu), donc $B^c \in \mathcal{G}$;
- si $B_n \in \mathcal{G}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ pour tout n, donc
$$f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{G} \in \mathcal{A}$$
car $\mathcal{A}$ est une tribu.

Ainsi, $\mathcal{G}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$. Par hypothèse, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Par suite, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, ce qui conclut. □

Proposition 2. Si $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$ est continue, alors elle est mesurable.

Démonstration. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$ est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{d'}$, il suffit par le lemme de montrer que $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}^{d'}$. Or ceci est évident puisque par continuité $f^{-1}(O)$ est ouvert, donc borélien. □

Proposition 3. Si $f_1 : (E, \mathcal{A}) \to (F_1, \mathcal{B}_1)$ et $f_2 : (E, \mathcal{A}) \to (F_2, \mathcal{B}_2)$ sont mesurables, alors l'application produit $(f_1, f_2) : (E, \mathcal{A}) \to (F_1 \times F_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ est mesurable, où on a défini la tribu produit
$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \sigma(\{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ est engendrée par les ensembles de la forme $B_1 \times B_2$ où $B_1 \in \mathcal{B}_1$ et $B_2 \in \mathcal{B}_2$, il suffit par le lemme de vérifier que $(f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \in \mathcal{A}$. Or effectivement
$$(f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$$
vu que $f_1^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$ et $f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$, f_1 et f_2 étant mesurables et $\mathcal{A}$ étant une tribu. □

Proposition 4. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que la famille
$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) | O \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$$
est une tribu contenant les ouverts, donc $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$: pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $O \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Puis, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on vérifie que la famille
$$\mathcal{G}' = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) | A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$$
est une tribu, qui contient les ouverts via ce qui précéde, donc $\mathcal{G}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on a ainsi $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, ce qui montre que
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$
Montrons l'inclusion réciproque. Il suffit de voir que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est dans la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et pour cela il suffit de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés ouverts $]a_1, b_1[\times]a_1, b_2[$. C'est bien le cas : par exemple, pour tout ouvert O,
$$O = \bigcup_{(x,r) \in I} B_x(r)$$

où $B_x(r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, et $I = \{(x, r) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}_+^* | B_x(r) \subset O\}$ (ensemble dénombrable). En effet, l'ensemble de droite est inclus dans O par définition ; et pour tout $y \in O$, comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_y(\varepsilon) \subset O$, et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe $x \in B_y(\varepsilon/3) \cap \mathbb{Q}^2$ et $r \in]\varepsilon/3, \varepsilon/2[\cap\mathbb{Q}$. Alors, $y \in B_x(r) \subset B_y(\varepsilon) \subset O$ donc y appartient à l'ensemble de droite. □

Proposition 5. Si $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables, alors $f + g$, fg, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables.

Démonstration. Il suffit maintenant de constater que, par exemple, $f + g = \psi \circ (f, g)$ où $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donnée par $\psi(x, y) = x + y$. En effet, en appliquant les propositions précédentes, ψ est continue donc mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Et (f, g) est mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Donc leur composée est mesurable vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même avec les fonctions $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \min(x, y)$. □

Proposition 6. Si $f_n : (E, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les applications $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, sont mesurables. En particulier, si $\lim_n f_n$ existe, alors cette application est mesurable.

Démonstration. On note $f = \inf_n f_n$. Comme $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendré par les ensembles de la forme $] - \infty, a[$ pour $a \in \mathbb{R}$ et par $\{+\infty\}$ et $\{-\infty\}$, il suffit d'après le lemme de montrer que $f^{-1}(] - \infty, a[) \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$ et de même pour $-\infty$. Or

$$f^{-1}(] - \infty, a[) = \bigcup_n f_n^{-1}(] - \infty, a[) \in \mathcal{A},$$

puisque $f_n^{-1}(] - \infty, a[) \in \mathcal{A}$ (mesurabilité de f_n) et que $\mathcal{A}$ est une tribu, et

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_n f_n^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_n \left(f_n^{-1}(\{-\infty\}) \cup f_n^{-1}(] - \infty, -M[) \right) \in \mathcal{A}$$

d'où la conclusion.
D'où le cas de $\sup_n f_n = -\inf_n(-f_n)$, puis les cas de $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ en découlent vu que

$$\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k.$$

□