DM de Probabilités

À rendre le 16 décembre.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\big[e^{c|X|}\big] < \infty.$$

On définit la fonction

$$H : \lambda \mapsto H(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X}].$$

1. Montrer que l'hypothèse
1.a) est vérifiée si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, où $\lambda > 0$;
1.b) n'est pas vérifiée si $X = Y^2$, où Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Justifier que, pour $\lambda \in [-c, c]$, la fonction H est bien définie et à valeurs dans $]0, +\infty[$.
3. Montrer que X est intégrable. Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser le fait que $x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. On s'intéresse à la régularité de H.
4.a) Montrer que H est dérivable sur $]-c, c[$, et donner en particulier la valeur de $H'(0)$.
4.b) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-c, c[$, et donner en particulier la valeur de $H''(0)$.
Désormais, on suppose de plus que $\mathbb{E}[X] = 0$, et on note $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X^2)(= \mathbb{E}[X^2])$.
4.c) Donner un développement limité de H au voisinage de 0, puis prouver que $\ln(H(\lambda)) \sim \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2$ quand $\lambda \to 0$.
4.d) En déduire que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\lambda \in]-c, c[$ tel que $\delta\lambda - \ln(H(\lambda)) > 0$.
5. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On souhaite donner une preuve de la loi forte des grands nombres, c'est-à-dire que $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s..
Soit $\delta > 0$.
5.a) Justifier que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} > \delta\Big) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_n} > e^{\lambda\delta n}) \leq e^{-n(\delta\lambda - \ln(H(\lambda)))}.$$

5.b) En choisissant λ grâce aux questions précédentes, en déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} > \delta\Big) < \infty$.
5.c) À l'aide d'un résultat du cours, obtenir que, p.s., il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{S_n}{n} \leq \delta$.
5.d) En considérant $-X_1, -X_2, \ldots$, expliquer pourquoi p.s., il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|S_n|}{n} \leq \delta$.
5.e) Conclure.

Exercice 2. On dispose de N boîtes numérotées de 1 à N. On répartit n boules dans ces boîtes de la façon suivante : chaque boule est placée dans une boîte choisie uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte peut donc contenir plusieurs boules). Autrement dit, si X_i est le numéro de la boîte où on place la boule i, alors $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme dans $\{1, \ldots, N\}$.
Pour $k = 1, \ldots, N$, on notera Z_k le nombre de boules dans la boîte k.
1. Quelle est la loi de Z_1, le nombre de boules dans la boîte 1 ? Quelle est son espérance ?
2. Pour $i = 1, \ldots, N$, on note A_i l'événement « la boîte i est vide ». Que vaut $\mathbb{P}(A_1)$?
3. Que vaut $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$? Est-ce que A_1 et A_2 sont indépendants ? Donner une justification rigoureuse **et** une justification « intuitive ».
4. On note V le nombre de boîtes vides.
4.a) Exprimer V à l'aide de $A_1, \ldots, A_N$. *(Penser aux fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_N}$).*
4.b) En déduire l'espérance du nombre de boîtes vides.
4.c) Exprimer V^2 à l'aide de $A_1, \ldots, A_N$, et en déduire que

$$\mathbb{E}[V^2] = N(N-1)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

puis donner une expression de $\mathrm{Var}(V)$.
On suppose désormais que $N = n$. On note V_n au lieu de V.
5. Quelle est la limite de $\dfrac{\mathbb{E}[V_n]}{n}$? On la note ℓ.
6. *(On pourra admettre cette question pour la suite)* Montrer que, quand $n \to \infty$, $\mathrm{Var}(V_n) \sim Cn$ pour une constante C à préciser.
7. À l'aide d'une inégalité du cours, montrer que la proportion de boîtes vides (c'est-à-dire $\dfrac{V_n}{n}$) converge en probabilité vers ℓ.