Intégration & probabilités
MACS 1

Bilan de la partie intégration

Laurent Tournier

Novembre 2018

UNIVERSITÉ PARIS 13

Eppur si muove !
Institut Galilée

Les notions clés

Espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

- E *ensemble*
- $\mathcal{A}$ *tribu* sur E : ensemble de sous-ensembles de E tel que
  1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ (et $E \in \mathcal{A}$);
  2. si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$;
  3. si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ (et $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$).
- μ *mesure* sur $\mathcal{A}$: fonction $\mathcal{A} \to [0, \infty]$ telle que
  1. $\mu(\emptyset) = 0$;
  2. si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous $n \neq m$, alors

$$\mu\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

- E *ensemble*
- $\mathcal{A}$ *tribu* sur E : ensemble de sous-ensembles de E tel que
  1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ (et $E \in \mathcal{A}$);
  2. si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$;
  3. si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ (et $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$).
- μ *mesure* sur $\mathcal{A}$: fonction $\mathcal{A} \to [0, \infty]$ telle que
  1. $\mu(\emptyset) = 0$;
  2. si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous $n \neq m$, alors

$$\mu\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Exemples :

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, et $\mu = \delta_x$, ou $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$, avec $\alpha_n \geq 0$, $x_n \in E$ (cas “discret”)
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et par exemple
  - $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$, $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}\,:\,x_n\in A} \alpha_n$
  - $\mu = \lambda_d$ (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), $\lambda_1 (= \lambda), \lambda_2, \lambda_3$: longueur, aire volume
  - $\mu = (\lambda_d)_{|K}$ (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ restreinte à K) : $(\lambda_d)_{|K}(A) = \lambda_d(A \cap K)$,
  - $\mu = f \cdot \lambda_d = f(x) d\lambda_d(x) = f(x)dx$ (mesure de densité f, où $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$), $\mu(A) = \int_A f\, d\lambda_d = \int \mathbf{1}_A(x) f(x) dx$
  - un mélange comme $\mu = \alpha_0 \delta_0 + f(x)dx$, ou ...

L'intégrale par rapport à une mesure

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $f : E \to \mathbb{R}$ (mesurable). On peut définir $\displaystyle\int f\,d\mu$ dans 2 cas :

- si f est **positive** (même à valeurs dans $[0, \infty]$) ; dans ce cas $\displaystyle\int f\,d\mu \in [0, \infty]$
- si f est **intégrable** par rapport à μ, c'est-à-dire que $\int |f| d\mu < \infty$.

Dans le cas positif, la définition se déduit du cas des fonctions indicatrices :

Pour $A \in \mathcal{A}$, $\qquad \displaystyle\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A).$

Par linéarité, on définit l'intégrale des fonctions étagées $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ (avec $\alpha_i \geq 0\ \forall i$, ou $\mu(A_i) < \infty\ \forall i$):

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Par limite croissante, on définit l'intégrale des fonctions f positives :

$\displaystyle\int f\,d\mu = \lim_n\uparrow \int f_n\,d\mu \in [0, \infty]$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est étagée ≥ 0, et $\forall x \in E$, $\displaystyle\lim_n\uparrow f_n(x) = f(x)$

Par différence entre parties positive et négative, on en déduit la définition quand f est intégrable :

$$\int f\,d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Intégrale discrète, intégrale de Riemann

Intégrale par rapport à une mesure discrète

On a
$$\int f\, d\delta_x = f(x).$$
Plus généralement, pour $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$,
$$\int f\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f(x_n),$$
à condition que $f \geq 0$ ou que f soit intégrable par rapport à μ (c.-à-d. que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n |f(x_n)| < \infty$)

Intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (ou Riemann-intégrable),
$$\int_I f\, d\lambda = \int_I f(x) dx$$
lorsque $I = [a, b]$, et cela reste vrai pour $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque on suppose de plus que $f \geq 0$, ou que f est intégrable sur $]a, b[$ (c'est-à-dire que $\int_{]a,b[} |f(x)| dx < \infty$).

Théorèmes de convergence

Théorème de convergence monotone

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables, de E dans $[0, \infty]$. On a

$$\int \lim_n \uparrow f_n \, d\mu = \lim_n \uparrow \int f_n \, d\mu.$$

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables, de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- pour presque tout $x \in E$, $\quad f_n(x)$ converge quand $n \to \infty$;
- pour presque tout $x \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |f_n(x)| \leq \varphi(x), \quad$ où $\displaystyle\int \varphi(x) d\mu(x) < \infty$.

Alors

$$\int \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Espace produit

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés.

On peut définir $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \nu)$ de telle sorte que, pour tous $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$,

$$A \times B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

On a même une formule générale : si $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$,

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_E \nu(C_x) d\mu(x) = \int_F \mu(C^y) d\nu(y)$$

où, pour $x \in E$, $C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\}$ et pour $y \in F$, $C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\}$ sont les “tranches” de C.

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés.

On peut définir $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \nu)$ de telle sorte que, pour tous $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$,

$$A \times B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

On a même une formule générale : si $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$,

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_E \nu(C_x) d\mu(x) = \int_F \mu(C^y) d\nu(y)$$

où, pour $x \in E$, $C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\}$ et pour $y \in F$, $C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\}$ sont les “tranches” de C.

La formule correspond exactement au cas $f = \mathbf{1}_C$ du théorème suivant :

Théorèmes de Fubini

Pour $f : E \times F \to \mathbb{R}$ mesurable, on a

$$\int_{E \times F} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left(\int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

si $f \geq 0$ (Fubini-Tonelli), ou si f est intégrable par rapport à $\mu \otimes \nu$ (Fubini-Lebesgue), c'est-à-dire si

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \qquad \text{(ou } \int_F \left(\int_E |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty\text{).}$$

Exemple : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$, $\lambda_d \otimes \lambda_{d'} = \lambda_{d+d'}$, et le théorème de Fubini est valide avec “dx” (c'est-à-dire $d\lambda_d(x)$)) au lieu de “$d\mu(x)$” et “$d\nu(x)$”

Mesure image, théorème de transfert

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et $\varphi : E \to F$.

On définit la mesure $\varphi_* \mu$ sur F par

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{F}, \qquad (\varphi_* \mu)(B) = \mu\Big(\varphi^{-1}(B)\Big).$$

La formule correspond exactement au cas $f = \mathbf{1}_C$ du théorème suivant :

Théorème de transfert

Pour $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable, on a

$$\int_E f(\varphi(x))\, d\mu(x) = \int_F f(y) d(\varphi_* \mu)(y)$$

si $f \geq 0$, ou si $f \circ \varphi$ est intégrable par rapport à μ, c'est-à-dire si

$$\int_E |f(\varphi(x))|\, d\mu(x) = \int_F |f(y)| d(\varphi_* \mu)(y) < \infty.$$

Changement de variable affine, dans $\mathbb{R}^d$

Soit $M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire (ou affine). Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lambda_d(M(B)) = |\det M| \lambda_d(B).$$

Autrement dit, la mesure image de λ_d par M est $\dfrac{1}{|\det M|}\lambda_d$, lorsque M est inversible.

En particulier, λ_d est invariante par les rotations et symétries orthogonales ($M^T M = I$ donc $\det M = \pm 1$)

Pour $B = [0,1]^d$, $M(B)$ est le *parallélotope* engendré par les vecteurs colonnes de M : M envoie le cube engendré par $e_1, \dots, e_d$ sur le parallélotope engendré par $M(e_1), \dots, M(e_d)$.

On a donc, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ mesurable,

$$\begin{aligned}\int_U f(Mx)dx &= \int_D f(y) \frac{1}{|\det M|} dy \\ &= \frac{1}{|\det M|} \int_D f(y)\, dy,\end{aligned}$$

à condition d'avoir $f \geq 0$, ou que f soit intégrable sur D.

Quelle est la mesure image de λ_d par une application non linéaire $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, injective ?

Soit $y \in \mathbb{R}^d$. Près de $x = \varphi^{-1}(y)$, si φ est différentiable, $\varphi(x+h) \simeq y + d\varphi_x(h)$: autrement dit, φ est presque égale à l'application affine $x + h \mapsto y + d\varphi_x(h)$
Ici, $d\varphi_x$ est la différentielle de $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$: c'est l'application linéaire de matrice $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq d}$.
Donc la mesure image de λ_d par φ est, "près de y", "presque égale à" $\frac{1}{|\det d\varphi_x|}\lambda_d = |\det(d\varphi^{-1})_y|\lambda_d$.

On suppose que $\varphi : U \to D$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, c'est-à-dire que φ est bijective, et que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la mesure image par φ de la mesure de Lebesgue sur U est la mesure de densité $|\det(d\varphi^{-1})|$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur D : en abrégé,

$$\varphi_* dx = |\det(d\varphi^{-1})_y| dy.$$

On a donc, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ mesurable,

$$\int_U f(\varphi(x)) dx = \int_D f(y) |J\varphi^{-1}(y)| dy,$$

où $J\varphi^{-1}(y) = |\det(d\varphi^{-1})_y|$, à condition d'avoir $f \geq 0$, ou que $f \circ \varphi$ soit intégrable sur U.