Examen du 18 janvier 2019

Durée : 3 heures

Aucun document ou appareil autorisé.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires du partiel sont définies sur cet espace.

Exercice 1 – ***Cours (questions obligatoires).***
1. Donner la définition d'une variable aléatoire X et de sa loi P_X.
2. À quelle(s) condition(s) est-ce que l'espérance d'une variable aléatoire X a un sens ? Donner alors sa définition puis son expression en fonction de la loi de X.

Exercice 2 – ***Une inégalité.*** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $E[X] \geq 0$. On cherche à démontrer l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout } \theta \in [0,1], \qquad P(X > \theta E[X]) \geq (1-\theta)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]}.$$

1. Montrer que, si a et c sont des réels tels que $a + c > 0$, alors

$$P(X \geq a) \leq P((X+c)^2 \geq (a+c)^2),$$

et en déduire par l'inégalité de Markov une majoration de $P(X \geq a)$ qui dépend de a et c.
2. On suppose $E[X] = 0$. Trouver la valeur de c (en fonction de a) pour laquelle la majoration précédente est la meilleure, et donner l'inégalité dans ce cas. Vérifier que l'on obtient

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X^2]}{a^2 + E[X^2]}.$$

3. On suppose désormais seulement $E[X] \geq 0$. En appliquant la question précédente à une variable aléatoire bien choisie, en déduire

$$P(X \geq E[X] + a) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2 + \operatorname{Var} X}.$$

4. Appliquer cette inégalité à $Y = 2E[X] - X$ et en déduire que

$$P(X > E[X] - a) \geq \frac{a^2}{a^2 + \operatorname{Var} X}.$$

5. Soit $\theta \in [0,1]$. Appliquer ce qui précède à une valeur de a particulière et en déduire (par une autre minoration) l'inégalité annoncée au début.
6. Expliciter les deux membres de cette inégalité dans les deux cas suivants : X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (loi $\mathcal{B}(p) = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$), et X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ (loi de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$).

Exercice 3 – ***Somme de variables aléatoires indépendantes.*** Soit X, Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes. On note F_X la fonction de répartition de X. On rappelle que par définition $F_X(x) = P(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. On suppose que X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose $Z = X + Y$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$P(Z = n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k) P(Y = n - k).$$

2. On suppose que X et Y admettent des densités. On les note respectivement f_X et f_Y. On pose $Z = X + Y$. Soit F_Z la fonction de répartition de Z. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(z) = \iint \mathbb{1}_{\{x+y \leq z\}} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(u-x) dx \right) du.$$

En déduire que Z admet pour densité la fonction f_Z définie par

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

La fonction f_Z est appelée *convolée* de X et de Y. On note $f_Z = f_X \star f_Y$.

3. Applications à des lois particulières.

3.a) On rappelle que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, montrer à l'aide de la question 1) que $X + Y$ a une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Soient maintenant X_1,...,X_n des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Quelle est la loi de $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$?

3.b) On rappelle que la loi Gamma de paramètre $\lambda > 0$ a pour densité $f(x) = \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$, où $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Gamma de paramètre respectif λ_1 et λ_2. Montrer que

$$f_X \star f_Y(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-z} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(z) \int_0^z \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\lambda_2 - 1} x^{\lambda_1 - 1} dx \quad = \frac{\int_0^1 (1-u)^{\lambda_2-1} u^{\lambda_1-1} du}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} z^{\lambda_1+\lambda_2-1} e^{-z} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(z).$$

En déduire que $\int_0^1 (1-u)^{\lambda_2-1} u^{\lambda_1-1} du = \Gamma(\lambda_1+\lambda_2)$, puis que $Z = X+Y$ suit la loi Gamma de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$. Soient maintenant X_1,...,X_n des variables aléatoires indépendantes de loi Gamma de paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Quelle est la loi de $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$?

Exercice 4 – ***Lois infiniment divisibles.*** Une variable aléatoire X a *une loi infiniment divisible* si pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, telles que X suive la même loi que $X_{1,n} + ... + X_{n,n}$. L'objectif de cette partie est d'identifier quelques lois infiniment divisibles et quelques lois qui ne le sont pas.

1. Quelques exemples, à l'aide de l'exercice précédent.

1.a) À l'aide de la question 3.a), montrer que la loi de Poisson de paramètre λ est infiniment divisible.

1.b) À l'aide de la question 3.b), montrer que la loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$) est infiniment divisible. *On notera que la loi exponentielle de paramètre 1 est la loi Gamma de paramètre* 1.

2. Des contre-exemples.

Soit X une variable aléatoire bornée : il existe $a > 0$ tel que $|X| \leq a$ presque-sûrement.

2.a) Justifier que X et X^2 sont intégrables et que $\mathrm{Var}(X) \leq a^2$.

On suppose maintenant que X est infiniment divisible et suit pour tout $n \geq 1$, la même loi que $X_{1,n} + ... + X_{n,n}$.

2.b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(X_{1,n} < -\frac{a}{n}) = 0$ et $P(X_{1,n} > \frac{a}{n}) = 0$.

2.c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{a^2}{n}$, puis que $\mathrm{Var}(X) = 0$.

2.d) Que peut-on en déduire d'une variable aléatoire bornée infiniment divisible ? Donner un exemple discret et un exemple à densité de lois non infiniment divisibles.

3. Construction de lois infiniment divisibles.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoires réelles indépendantes et de même loi.

3.a) Soit N une variable aléatoire indépendante des X_n, et qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On définit la variable aléatoire Y par

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Par convention si $N = 0$, alors $Y = 0$. À l'aide de la question 3.a) de l'exercice précédent, montrer que Y est infiniment divisible.

3.b) On note Φ_{X_1} la fonction caractéristique de X_1 : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[e^{itY} \mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \Phi_{X_1}(t)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

En déduire Φ_Y.

3.c) Redémontrer, à partir de la question précédente, que Y est infiniment divisible.