Intégration & probabilités
MACS 1
Présentation du cours

Laurent Tournier

Septembre 2018

UNIVERSITÉ PARIS 13

Eppur si muove !

Institut Galilée

Enseignants

- *Cours (10 séances de 3h) :* Laurent Tournier
  `tournier@math.univ-paris13.fr`
  `http://www.math.univ-paris13.fr/~tournier`
  Bureau D313
- *TD (10 séances de 3h) :* Clément Foucart
  `foucart@math.univ-paris13.fr`
  Bureau D320

Modalités d'évaluation

- Partiel (date à fixer)
- Examen (le 16 janvier)
- 2 devoirs maison
- Note finale $= \dfrac{\text{Examen} + \text{Partiel}}{2}$

+ prise en compte des DM sous forme de bonus

Références

- Polycopié du cours (ne remplace pas le cours !! Assister au cours pour les explications et les exemples)
- Pour aller plus loin (démonstrations complètes) :

Intégration et probabilités
J.-F. Le Gall
`http://www.math.ens.fr/~legall/IPPA.pdf`

et avec de nombreux exemples et exercices :

De l'intégration aux probabilités
O. Garet & A. Kurtzmann
(à la BU)

Objectifs du cours

Définir et étudier une *extension* de la définition de l'**intégrale** d'une fonction (appelée *intégrale de Lebesgue*), et son application à la théorie des **probabilités**

Qu'est-ce que l'**intégrale** d'une fonction f ?

L'intégrale usuelle est une notion de **« somme »** des valeurs de f (pondérées de façon « infinitésimale ») qui correspond, si la fonction f est assez régulière, à l'**aire** (algébrique) sous sa courbe.

Elle satisfait des propriétés *analogues à celles des sommes* :
- croissance : si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$
- linéarité : $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$, d'où :
- concaténation (relation de Chasles) : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

$\rightsquigarrow$ on souhaite définir l'intégrale dans un cadre plus général, en préservant ces propriétés.

Repères historiques sur l'intégrale

Les intégrales sont utilisées (calculées) depuis le XVII^{e} siècle (Newton, Leibniz), à travers leur lien avec les primitives :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \qquad \text{où} \qquad F' = f$$

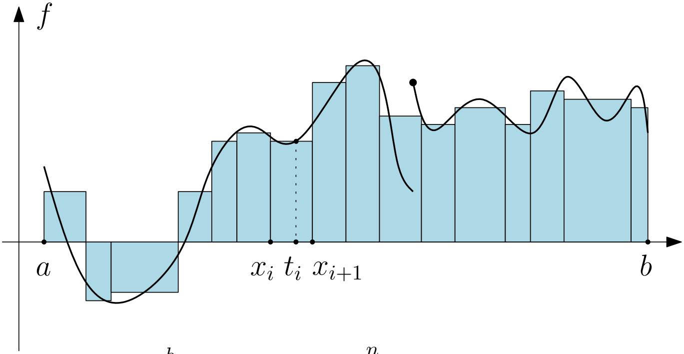
mais comment justifier que F existe en général ? En pratique, on peut souvent deviner (calculer) F, mais ce n'est pas toujours possible ; et on aimerait une preuve générale, pour toute fonction f assez régulière...
$\rightarrow$ Il faut construire une notion d'intégrale (aire sous la courbe), indépendamment de la notion de primitive – qui sera liée *a posteriori*.

• les premières définitions rigoureuses de l'intégrale datent de Cauchy (1823) et Riemann (1854).
• Henri Lebesgue introduit sa définition de l'intégrale en 1901.
• Son utilisation en probabilité est due à Andrei Kolmogorov en 1933.

Intégrale de Riemann

Principe : approximation de f par des fonctions en escalier
(car on sait intégrer des fonctions en escalier)

Pour toute subdivision $(x_i)_i$ de l'espace de départ, dont le pas tend vers 0 avec n, pour tous points $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$,



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i)$$

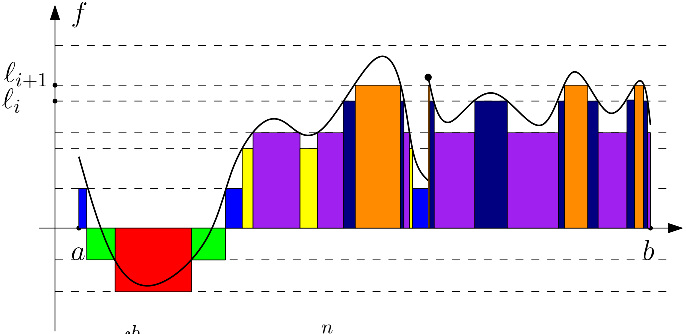
Limitations de l'intégrale de Riemann

- Définition peu naturelle pour des fonctions non bornées (découpage de l'intervalle, et limite pour se ramener au cas borné)
- Non définie pour certaines fonctions bornées très irrégulières
- Difficulté de l'étude des limites : si $f_n \to f$, alors $\int f_n \to \int f$? D'abord, est-ce que $\int f$ a un sens ?
- Définition restreinte aux fonctions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, sans généralisation directe à d'autres espaces de départ

Intégrale de Lebesgue

Principe : approximation de f par des fonctions *étagées*

Pour toute subdivision $(\ell_i)_i$ *de l'espace d'arrivée* dont le pas tend vers 0 avec n,

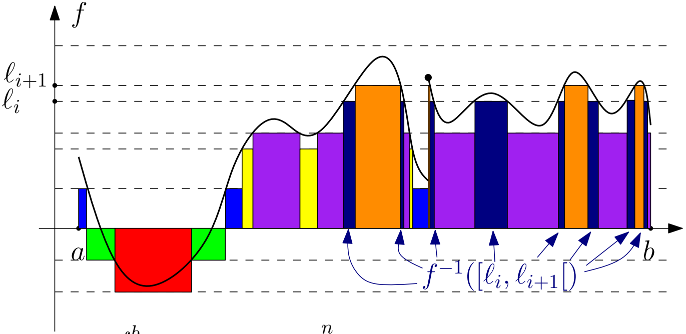


$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \text{longueur}(f^{-1}([\ell_i, \ell_{i+1}[))\ell_i$$

Intégrale de Lebesgue

Principe : approximation de f par des fonctions *étagées*

Pour toute subdivision $(\ell_i)_i$ *de l'espace d'arrivée* dont le pas tend vers 0 avec n,

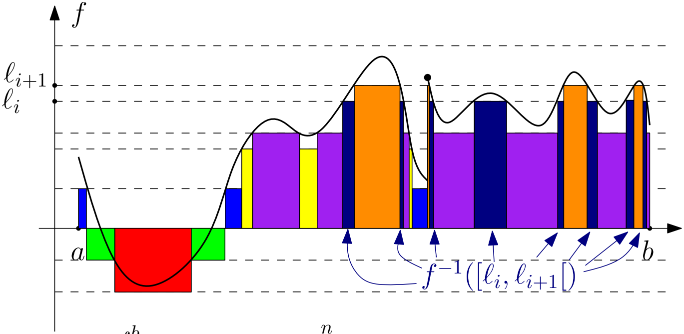


$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \text{longueur}(f^{-1}([\ell_i, \ell_{i+1}[))\ell_i$$

Intégrale de Lebesgue

Principe : approximation de f par des fonctions *étagées*
(mais sait-on intégrer des fonctions étagées ?)

Pour toute subdivision $(\ell_i)_i$ *de l'espace d'arrivée* dont le pas tend vers 0 avec n,



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \text{longueur}(f^{-1}([\ell_i, \ell_{i+1}[))\ell_i$$

Comment définir longueur(A) pour $A \subset [a, b]$? $\Rightarrow$ théorie de la mesure

Intérêts de l'intégrale de Lebesgue

- Se définit même si f n'est pas bornée, de la même manière
- Se définit pour une très large classe de fonctions (très irrégulières)
- Existence de théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale
- S'étend naturellement à d'autres espaces de départ ($f : E \to \mathbb{R}$), si on donne un sens à la "longueur" (on parle alors de "mesure" μ) :

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

L'intégrale usuelle correspond au cas où μ donne la "longueur". On appelle cette mesure la *mesure de Lebesgue* (sur $\mathbb{R}$).

Si $\mu(E) = 1$, on peut interpréter E comme l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire et $\mu(A)$ comme une mesure de la "proportion de chance", ou "probabilité" d'un "événement" $A \subset E$.
$\Rightarrow$ fondement rigoureux et unifié de la théorie des probabilités

Plan du cours – Intégration

0. Préliminaires sur les ensembles
1. Espaces mesurés (tribu, mesure, fonction mesurable)
2. Intégration par rapport à une mesure
   - Définition de l'intégrale
   - Théorèmes de convergence
   - Intégrales à paramètre
   - Espaces fonctionnels L^1 et L^2
3. Intégration sur un espace produit : théorèmes de Fubini
4. Changement de variables

Plan du cours – Probabilités

1. Bases de la théorie des probabilités
   - Espace de probabilités, événements
   - Probabilité conditionnelle, indépendance
   - Variables aléatoires, loi, espérance, variance
2. Suites de variables aléatoires
   - Notions de convergence
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite