Pour tout intervalle borné $I$ de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Puis, pour toute boîte $B = I_1 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ (où $I_1,\dots,I_d$ sont des intervalles bornés), on note $|B| = |I_1| \times \cdots \times |I_d|$ son volume.

**Théorème 1.** Il existe une mesure $\lambda$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que, pour toute boîte $B$, $\lambda(B) = |B|$, et elle est unique. On l'appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

**On commence par définir élémentairement $\lambda$, notée encore $|\cdot|$, pour les unions finies de boîtes**

**Lemme 1.** Soit $E$ une union finie de boîtes.
– Il existe des boîtes $B_1, \cdots, B_n$ *disjointes* telles que $E = B_1 \cup \cdots \cup B_n$.
– La quantité $|E| = |B_1| + \cdots + |B_n|$ ne dépend pas du choix de la décomposition précédente.

*Démonstration.* Le lemme peut paraître évident ; donnons-en néanmoins les grandes lignes d'une preuve formelle. On obtient un découpage en boîtes disjointes en considérant la partition de $E$ par les hyperplans formant les bords des boîtes (chaque hyperplan découpe l'espace en 3 parties disjointes).
Pour le deuxième point, on peut noter que, pour toute boîte $B$,

$$|B| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \mathrm{Card}\left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right)$$

En effet, si $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, le cardinal ci-dessus est le nombre d'entiers $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ tels que $(k_1/N, \dots, k_d/N) \in B$, c'est-à-dire tels que

$$Na_1 \le k_1 \le Nb_1, \quad \dots, \quad Na_d \le k_d \le Nb_d$$

donc ce cardinal vaut

$$\big(Nb_1 - Na_1 + \varepsilon_{N,1}\big) \times \cdots \times \big(Nb_d - Na_d + \varepsilon_{N,d}\big)$$

où $\varepsilon_{N,1}, \dots, \varepsilon_{N,d}$ sont compris entre 0 et 1. Et ainsi on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^d}\mathrm{Card}\left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) &= \frac{Nb_1 - Na_1 + \varepsilon_{N,1}}{N} \cdots \frac{Nb_d - Na_d + \varepsilon_{N,d}}{N} \\ &= \left(b_1 - a_1 + \frac{\varepsilon_{N,1}}{N}\right) \cdots \left(b_d - a_d + \frac{\varepsilon_{N,d}}{N}\right) \\ &\underset{N}{\longrightarrow} (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) = |B|.\end{aligned}$$

On peut écrire le même calcul si les intervalles formant $B$ ne sont pas fermés.
Finalement, si $E = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ avec $B_1, \dots, B_n$ boîtes disjointes, alors (par additivité du cardinal de parties disjointes)

$$\frac{1}{N^d}\mathrm{Card}\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{N^d}\mathrm{Card}\left(B_i \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \underset{N}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^n |B_i|,$$

et le membre de gauche ne dépend pas du découpage, donc la limite non plus. □

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des unions finies de boîtes. Par le lemme précédent, on a défini $|E|$ pour $E \in \mathcal{E}$.
Par le second point, on obtient le fait que, si $E, F \in \mathcal{E}$ sont *disjoints*, alors $E \cup F$ (qui est aussi une réunion finie de boîtes) vérifie

$$|E \cup F| = |E| + |F|.$$

Alors, si $E, F \in \mathcal{E}$, on a aussi $E \cap F \in \mathcal{E}$ et $E \cap F^c \in \mathcal{E}$, et ces parties sont disjointes donc

$$|E| = |E \cap F| + |E \cap F^c|$$

et de même

$$|F| = |E \cap F| + |E^c \cap F|$$

d'où l'on déduit

$$|E \cup F| = |E \cap F| + |E \cap F^c| + |E^c \cap F| = |E| + |F| - |E \cap F|$$

et la sous-additivité de $|\cdot|$ :

$$|E \cup F| \le |E| + |F|.$$

**Puis pour tout ensemble (en vérifiant que la définition redonne celle des unions finies de boîtes)**
Pour toute partie $E$ de $\mathbb{R}$, on définit

$$\lambda(E) = \inf\left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |B_k| \,\middle|\, \text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ B_k \text{ est une boîte, et } E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \right\}.$$

Donnons tout de suite des propriétés simples de $\lambda$ :

**Lemme 2.** a) $\lambda(\emptyset) = 0$
b) si $E \subset E'$, alors $\lambda(E) \leq \lambda(E')$ *(monotonie)*
c) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}$, alors $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ *(sous-additivité dénombrable)*

*Démonstration.* a) est immédiat (on peut dire que $\emptyset \subset B$ où $B$ est une boîte quelconque de volume 0).
b) vient du fait que tout recouvrement de $E'$ est un recouvrement de $E$. Prouvons c). Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ Pour tout $n \geq 1$, il existe une famille $(B_{n,k})_{k\geq 1}$ de boîtes telle que $E_n \subset \bigcup_n B_{n,k}$, et $\lambda(E_n) \geq \sum_k |B_{n,k}| - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Alors on a

$$\bigcup_n E_n \subset \bigcup_n \bigcup_k B_{n,k},$$

donc la famille $(B_{n,k})_{n,k\geq 1}$ est une famille (dénombrable) de boîtes qui recouvre $\bigcup_n E_n$ et par suite

$$\lambda\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \sum_k |B_{n,k}| \leq \sum_n \left(\lambda(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \lambda(E_n) + \varepsilon.$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la propriété c). $\square$

Il reste à montrer que $\lambda(B) = |B|$ pour toute boîte $B$, et qu'il y a égalité dans le point c) ci-dessus lorsque les parties sont disjointes (afin que $\lambda$ soit une mesure). Commençons par la première partie.

**Proposition 1.** Pour tout ensemble $E$ qui est réunion finie de boîtes, $\lambda(E) = |E|$.

*Démonstration.* Comme $E = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ avec des boîtes $C_1, \ldots, C_n$ disjointes,

$$\lambda(E) \leq \sum_{i=1}^{n} |C_i| = |E|.$$

Il faut donc montrer $\lambda(E) \geq |E|$. Supposons d'abord que $E$ est fermé, donc compact puisqu'une union finie de boîte est bornée.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille $(B_k)_{k\geq 1}$ de boîtes telle que $E \subset \bigcup_k B_k$, et $\sum_k |B_k| < \lambda(E) + \varepsilon$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la boîte $B_k$ est incluse dans une boîte ouverte $B'_k$ telle que $|B'_k| < |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. On a toujours $E \subset \bigcup_k B'_k$, et

$$\sum_k |B'_k| \leq \sum_k |B_k| + \varepsilon < \lambda(E) + 2\varepsilon.$$

Comme $E$ est un compact, recouvert par les ouverts $B'_k$, $k \geq 1$, la propriété de Borel-Lebesgue montre qu'il existe un sous-recouvrement fini : il existe $N$ tel que $E \subset B'_1 \cup \cdots \cup B'_N$. Par sous-additivité de $|\cdot|$,

$$|E| \leq |B'_1| + \cdots + |B'_N|,$$

et donc

$$|E| \leq |B'_1| + \cdots + |B'_N| \leq \sum_k |B'_k| \leq \lambda(E) + 2\varepsilon.$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|E| \leq \lambda(E)$, ce que l'on voulait démontrer (dans le cas où $E$ est fermé).
Supposons maintenant que $E$ n'est pas fermé. Soit $\varepsilon > 0$. On se ramène au cas précédent en introduisant, pour $i = 1, \ldots, n$, une boîte fermée $C'_i$ telle que $C'_i \subset C_i$ et $|C_i| < |C'_i| + \varepsilon$. Alors les boîtes $C'_i$ sont disjointes et en notant $E' = C'_1 \cup \cdots \cup C'_n$ on a

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} |C_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |C'_i| + n\varepsilon = |E'| + n\varepsilon \leq \lambda(E') + n\varepsilon \leq \lambda(E) + n\varepsilon,$$

où la dernière majoration provient de la monotonie de $\lambda$ et de ce que $E' \subset E$. Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la conclusion. $\square$

**On vérifie l'additivité finie pour des ensembles séparés (à distance $> 0$)**
Pour des ensembles quelconques, on commence par montrer l'additivité sous forme restreinte : lorsque les ensembles sont « bien séparés » (au lieu de simplement les supposer disjoints).

**Proposition 2.** Soit $E, F$ des parties de $\mathbb{R}$ bien séparées, c'est-à-dire que $d(E, F) > 0$ : il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $\|x - y\| > \kappa$. Alors

$$\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

*Démonstration.* Par la sous-additivité de $\lambda$ déjà vue, on a $\lambda(E \cup F) \leq \lambda(E) + \lambda(F)$, donc il reste à voir $\lambda(E \cup F) \geq \lambda(E) + \lambda(F)$. Si $\lambda(E) = \infty$ ou $\lambda(F) = \infty$, alors $\lambda(E \cup F) = \infty$ (par monotonie de $\lambda$) et donc la propriété est vraie. On peut donc supposer maintenant que $\lambda(E) < \infty$ et $\lambda(F) < \infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\lambda$, il existe une famille $(B_k)_k$ de boîtes telle que $E \cup F \subset \bigcup_k B_k$, et

$$\sum_k |B_k| < \lambda(E \cup F) + \varepsilon.$$

Supposons pour commencer que chaque boîte $B_k$ rencontre ou bien seulement $E$, ou bien seulement $F$ : on pourrait partitionner la famille $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en deux sous-familles disjointes $(B_k)_{k\in I}$ et $(B_k)_{k\in J}$ (avec $I, J \subset \mathbb{N}$, $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \mathbb{N}$) telles que $E \subset \bigcup_{k\in I} B_k$ et $F \subset \bigcup_{k\in J} B_k$. Alors on aurait par définition de $\lambda$

$$\lambda(E) \leq \sum_{k\in I} |B_k| \qquad \text{et} \qquad \lambda(F) \leq \sum_{k\in J} |B_k|,$$

d'où

$$\sum_k |B_k| = \sum_{k\in I} |B_k| + \sum_{k\in J} |B_k| \geq \lambda(E) + \lambda(F)$$

et ainsi

$$\lambda(E \cup F) > \lambda(E) + \lambda(F) - \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, cela conclurait.
Cependant, il se peut que certaines boîtes $B_k$ rencontrent à la fois $E$ et $F$. L'hypothèse que $E$ et $F$ sont bien séparés va permettre de se ramener au cas précédent. En effet, on peut toujours supposer que les boîtes $B_k$ sont de diamètre inférieur à $\kappa$. Il suffit pour cela de les découper en réunion de boîtes plus petites. Et on peut aussi supposer que les boîtes $B_k$ rencontrent $E \cup F$, car enlever celles qui ne rencontreraient ni $E$ ni $F$ assure toujours le recouvrement, et renforce l'inégalité $\sum_k |B_k| < \lambda(E \cup F) + \varepsilon$. Or si une boîte est de diamètre inférieur à $\kappa$ et rencontre $E$, elle ne peut rencontrer $F$ vu que $d(E, F) > \kappa$, et vice-versa. On est donc bien dans la situation traitée plus haut. □

Par récurrence, on déduit alors que, si $E_1, \ldots, E_n$ sont deux à deux bien séparés, alors

$$\lambda(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \lambda(E_1) + \cdots + \lambda(E_n).$$

En effet, $E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}$ et $E_n$ sont bien séparés. On peut passer à la limite :

**Corollaire 1.** Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^d$ deux à deux bien séparées. Alors

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \lambda(E_n).$$

*Démonstration.* On obtient pour tout $N \geq 1$, en utilisant la proposition précédente puis la monotonie et la sous-additivité de $\lambda$,

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(E_n) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) \leq \lambda\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda(E_n),$$

D'où, en passant à la limite quand $N \to \infty$, la proposition. □

**On vérifie enfin l'additivité... pour les ensembles Lebesgue-mesurables**
On en vient à la fin de la démonstration : l'additivité pour des parties quelconques de $\mathbb{R}$. Cependant cette propriété est fausse en toute généralité. Il est nécessaire de se restreindre à certaines parties de $\mathbb{R}$.

**Définition 1.** Une partie $E$ de $\mathbb{R}^d$ est *Lebesgue-mesurable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U$ et un fermé $F$ tels que $F \subset E \subset U$ et $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties Lebesgue-mesurables.

**Proposition 3.** L'ensemble $\mathcal{L}$ est une tribu, c'est-à-dire que
- $\emptyset \in \mathcal{L}$ ;
- pour tout $E \in \mathcal{L}$, $E^c \in \mathcal{L}$ ;
- pour toute famille dénombrable $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}$, $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{L}$.

De plus, les ensembles suivants sont Lebesgue-mesurables :
- les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^d$ ;
- les ensembles $E$ tels que $\lambda(E) = 0$.

Par conséquent, les boréliens sont Lebesgue-mesurables : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}$.

*Démonstration.* Le fait que $\mathcal{L}$ est une tribu est très simple. Les deux premières propriétés sont directes (pour la première, prendre $F = U = \emptyset$, et pour la deuxième si $F \subset E \subset U$ alors $U^c \subset E^c \subset F^c$, et $F^c \setminus U^c = U \setminus F$). Pour la troisième, on introduit pour tout $k \in \mathbb{N}$ un fermé $F_k$ et un ouvert $U_k$ tels que $F_k \subset E_k \subset U_k$ et $\lambda(U_k \setminus F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, et on a alors $F = \bigcup_k F_k \subset \bigcup_k E_k \subset \bigcup_k U_k = U$ où $U$ est ouvert et $F$ est fermé, et $\lambda(U \setminus F) = \lambda(\bigcup_k U_k \setminus F_k) \leq \sum_k \lambda(U_k \setminus F_k) \leq \varepsilon$.
Avant de montrer que les ouverts sont Lebesgue-mesurables, remarquons que les boîtes le sont : pour toute boîte $B$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boîte ouverte $B_U$ et une boîte fermées $B_F$ telles que $B_F \subset B \subset B_U$, $|B_F| \leq |B| + \varepsilon/2$ et $|B| \leq |B_U| + \varepsilon/2$, d'où (par additivité de $|\cdot|$) $\lambda(B_F \setminus B_U) = |B_F \setminus B_U| = |B_F| - |B_U| \leq \varepsilon$.
Via la propriété de tribu de $\mathcal{L}$, il suffit maintenant de remarquer que tout ouvert $U$ est réunion dénombrable de boîtes. Ceci est vrai puisque, par exemple, en introduisant les cubes $C_n(x) = x + [-2^{-n}, 2^{-n}]^d$ où $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$U = \bigcup \left\{ C_n(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } C_n(x) \subset U \right\}.$$

En effet, tout $z \in U$ appartient à une boule incluse dans $U$ (car $U$ est ouvert), et cette boule contient un cube de la forme $C_n(x)$ centré en un point rationnel $x$ et contenant $z$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, comme $C_n(x) \in \mathcal{L}$ pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $n \in \mathbb{N}$, et l'union est dénombrable (indexée par une partie de $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{N}$) on a $U \in \mathcal{L}$.
Par passage au complémentaire, on en déduit la présence des fermés dans $\mathcal{L}$.
Enfin, soit $E$ tel que $\lambda(E) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille $(B_k)_{k \geq 1}$ de boîtes telle que $E \subset \bigcup_k B_k$ et $\sum_{k \geq 1} |B_k| < \varepsilon/2$. Pour tout $k \geq 1$, il existe une boîte ouverte $B'_k$ contenant $B_k$ et telle que $|B'_k| < |B_k| + \varepsilon 2^{-k-1}$. Alors on a $\emptyset \subset E \subset \bigcup_{k \geq 1} B'_k$, les ensembles $\emptyset$ et $\bigcup_{k \geq 1} B'_k$ sont respectivement fermé et ouvert, et $\lambda(\bigcup_{k \geq 1} B'_k) \leq \sum_k |B'_k| < \varepsilon$. Par suite, $E \in \mathcal{L}$. □

**Proposition 4.** Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une famille dénombrable de parties Lebesgue-mesurables disjointes. Alors

$$\lambda\Big(\bigcup_{n \geq 1} E_n\Big) = \sum_{n \geq 1} \lambda(E_n).$$

*Démonstration.* On commence par noter que, si les $E_n$ sont compacts, alors ils sont bien séparés deux à deux, donc la proposition est vraie, comme on l'a déjà vu.
Supposons maintenant les $E_n$ bornés. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n$, il existe un fermé $F_n$ et un ouvert $U_n$ tels que $F_n \subset E_n \subset U_n$ et $\lambda(U_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Comme $F_n$ est fermé est borné, $F_n$ est compact, et ces ensembles sont disjoints. On a donc, par une proposition précédente,

$$\sum_{n \geq 1} \lambda(F_n) = \lambda\Big(\bigcup_{n \geq 1} F_n\Big).$$

De plus, par sous-additivité $\lambda(U_n) \leq \lambda(U_n \setminus F_n) + \lambda(F_n) < \varepsilon 2^{-n} + \lambda(F_n)$ ce qui donne, en utilisant de plus la monotonie,

$$\lambda(E_n) - \varepsilon 2^{-n} \leq \lambda(U_n) - \varepsilon 2^{-n} \leq \lambda(F_n).$$

Par suite, avec la monotonie et la sous-additivité,

$$\sum_{n \geq 1} \lambda(E_n) - \varepsilon \leq \sum_{n \geq 1} \lambda(F_n) = \lambda\Big(\bigcup_{n \geq 1} F_n\Big) \leq \lambda\Big(\bigcup_{n \geq 1} E_n\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda(E_n).$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc donne la proposition, dans ce cas.
On ne suppose maintenant plus les $E_n$ bornés. On se ramène au cas précédent par découpage : on peut écrire $\mathbb{R}^d = \bigcup_{m \geq 1} A_m$ avec $A_m$ mesurable et borné, disjoints (par exemple, $A_m = B(0, m) \setminus B(0, m-1)$), de sorte que les ensembles $A_m \cap E_n$, pour $n, m \geq 1$, forment une famille dénombrable d'ensembles mesurables et bornés, d'où

$$\lambda\Big(\bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} (A_m \cap E_n)\Big) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \lambda(A_m \cap E_n).$$

(Par le théorème de Fubini-Tonelli pour les séries doubles,) On somme alors selon $m$ dans chaque membre : $\bigcup_m (A_m \cap E_n) = E_n$ et $\sum_m \lambda(A_m \cap E_n) = \lambda(E_n)$ car les $A_m \cap E_n$ sont une partition de $E_n$ en parties mesurables bornées. Ainsi, on obtient la proposition. □

Ceci achève de démontrer que $\lambda$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L})$, et donc par restriction sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
L'unicité peut se déduire de cette construction : tout ouvert est union dénombrable de boîtes disjointes (de la forme $\prod_i [a_i, b_i[$, avec $a_i$ et $b_i$ dyadiques) donc la mesure des ouverts est déterminée par le volume des boîtes, ce qui détermine la définition donnée de "Lebesgue-mesurable" (car seule intervient la mesure d'un ouvert), et cette définition implique la régularité extérieure : $\lambda(E) = \inf \lambda(U)$ parmi les ouverts $U$ contenant $E$, ce qui détermine $\lambda(E)$, pour $E \in \mathcal{L}$ donc aussi pour $E \in \mathcal{B}$.
*Référence : blog de Terence Tao, avec quelques petites modifications :*
`http://terrytao.wordpress.com/2010/09/09/245a-notes-1-lebesgue-measure/`