

DEVOIR MAISON

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

Exercice 1 – Temps de ruine. On considère le problème de la ruine du joueur dans un jeu équilibré : soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov sur $\{0, 1, \dots, N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P(0,0) = 1, \quad P(N,N) = 1, \quad \forall k \in \{1, \dots, N-1\}, \quad P(k, k+1) = P(k, k-1) = \frac{1}{2}.$$

On note

$$T = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \in \{0, N\}\} = \min(\tau_0, \tau_N).$$

1. Justifier (grâce au cours) que $T < \infty$ p.s., quel que soit l'état initial.
2. Pour $x \in \{0, \dots, N\}$, on note N_x le nombre de visites en x :

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}.$$

- 2.a) Justifier (grâce au cours) que $\mathbb{E}_x[N_x] < \infty$ p.s., quel que soit l'état initial $x \in \{1, \dots, N-1\}$.
- 2.b) Montrer que, pour tous états $x \neq y$, pour tout n ,

$$\mathbb{E}_x[N_y \mathbf{1}_{\{\tau_y=n\}}] = \mathbb{P}_x(\tau_y = n) \mathbb{E}_y[N_y],$$

et en déduire une relation entre $\mathbb{E}_x[N_y]$ et $\mathbb{E}_y[N_y]$ permettant de conclure que $\mathbb{E}_x[N_y] < \infty$ si $y \in \{1, \dots, N-1\}$.

2.c) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathbb{E}_x[T] < \infty$ pour tout état initial x .

3. Pour $x = 0, \dots, N$, on pose $g(x) = \mathbb{E}_x[T]$.

3.a) Que valent $g(0)$ et $g(N)$?

3.b) Démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } x = 1, \dots, N-1, \quad g(x) = 1 + \frac{g(x-1) + g(x+1)}{2}.$$

Décomposer selon la valeur de X_1 et utiliser la propriété de Markov au temps 1.

3.c) En déduire une relation de récurrence vérifiée par $f : x \mapsto g(x) + x^2$, et la résoudre pour obtenir $f(x)$, pour $x = 0, \dots, N$ et conclure :

$$\text{pour } x = 0, \dots, N, \quad \mathbb{E}_x[T] = x(N-x).$$

4. A-t-on utilisé le résultat de la question 2.c) ?

Exercice 2 – Déplacements aléatoires d'un cavalier. On considère, sur l'espace d'états $E = \{1, \dots, 8\} \times \{1, \dots, 8\}$, une chaîne de Markov correspondant à des déplacements aléatoires d'un cavalier du jeu d'échecs : sachant la position $X_n \in E$, X_{n+1} est choisie aléatoirement de façon uniforme parmi les positions dans E atteignables par un cavalier situé en X_n . Pour deux cases $x, y \in E$, on notera $x \sim y$ si un mouvement de cavalier mène de x en y . On note, pour $x \in E$, $d(x)$ le nombre de positions atteignables depuis x :

$$d(x) = \text{Card}\{y \in E \mid y \sim x\}.$$

1. Représenter sur un schéma les valeurs de $d(\cdot)$. Grâce aux symétries, on pourra se contenter de ne donner qu'un petit nombre de valeurs.
2. (Facultatif) Justifier que cette chaîne de Markov est irréductible. Par exemple, on pourra commencer par vérifier que tout état (i, j) communique avec les états $(i+1, j)$ (si $i \leq 7$) et $(i, j+1)$ (si $j \leq 7$)...
3. Montrer que d est une mesure invariante pour la chaîne de Markov et en déduire la probabilité invariante.
4. En déduire, en fonction de la position initiale $x \in E$, l'espérance $\mathbb{E}_x[\tau_x]$ du temps de retour à cette position initiale.